

Задачи на решётке, лемма Минковского

1. На клетчатой бумаге нарисован тридцатисемиугольник с целыми сторонами. Докажите, что его периметр — четное число.
2. * На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах, ни одна из сторон которого не параллельна линиям сетки. Докажите, что сумма длин отрезков вертикальных линий внутри многоугольника равна сумме длин отрезков горизонтальных линий внутри многоугольника.
3. Дан треугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги. На сторонах треугольника узлов, отличных от вершин, нет. Внутри треугольника есть ровно один узел. Докажите, что он является точкой пересечения медиан этого треугольника.
4. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах квадрата?
5. * Какие правильные многоугольники могут иметь все вершины в узлах клетчатой бумаги?
6. На клетчатой бумаге дано множество площади меньше 1. Докажите, что его можно сдвинуть так, чтобы оно не покрывало ни одного узла.
7. * Во всех узлах целочисленной решетки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус r . Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.
8. Постройте выпуклое множество, содержащее бесконечно много узлов клетчатой бумаги, но не содержащее бесконечного множества коллинеарных узлов.

Задачи на решётке, лемма Минковского

1. На клетчатой бумаге нарисован тридцатисемиугольник с целыми сторонами. Докажите, что его периметр — четное число.
2. * На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах, ни одна из сторон которого не параллельна линиям сетки. Докажите, что сумма длин отрезков вертикальных линий внутри многоугольника равна сумме длин отрезков горизонтальных линий внутри многоугольника.
3. Дан треугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги. На сторонах треугольника узлов, отличных от вершин, нет. Внутри треугольника есть ровно один узел. Докажите, что он является точкой пересечения медиан этого треугольника.
4. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах квадрата?
5. * Какие правильные многоугольники могут иметь все вершины в узлах клетчатой бумаги?
6. На клетчатой бумаге дано множество площади меньше 1. Докажите, что его можно сдвинуть так, чтобы оно не покрывало ни одного узла.
7. * Во всех узлах целочисленной решетки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус r . Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.
8. Постройте выпуклое множество, содержащее бесконечно много узлов клетчатой бумаги, но не содержащее бесконечного множества коллинеарных узлов.