Алгоритм Евклида, линейное представление НОД

1. Примените алгоритм Евклида к паре чисел 361, 1007 и найдите коэффициенты $m, k \in \mathbb{Z}$ такие, что $361m + 1007k = (361, 1007)$.
2. Найдите НОД чисел $3^{361} - 1$ и $3^{1007} - 1$.
3. Найдите НОД чисел $\underbrace{11...1}_{361}$ и $\underbrace{11...1}_{1007}$.
4. * Дан многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такой, что $P(t) > 0$ при $t \geq 0$. Последовательность x_n ($n \in \mathbb{N}_0$) задана условиями $x_0 = 0$, $x_n = P(x_{n-1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что для любых натуральных m и k справедливо $(x_m, x_k) = x_{(m,k)}$.
5. Найдите НОД чисел $1 + 17\mathfrak{i}$ и $-8 + 9\mathfrak{i}$ и найдите коэффициенты $m, k \in \mathbb{Z}[\mathfrak{i}]$ такие, что $m(1 + 17\mathfrak{i}) + k(-8 + 9\mathfrak{i}) = (1 + 17\mathfrak{i}, -8 + 9\mathfrak{i})$.
6. При каких n сократима дробь $\dfrac{5n+7}{13n+20}$?
7. * Докажите, что число шагов в алгоритме Евклида для пары $a, b \in \mathbb{N}$ не превосходит $2(\lfloor \log_2 b \rfloor + 1)$.
8. О последовательности y_n ($n \in \mathbb{N}$) известно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $y_{n+a} = y_n$ и $y_{n+b} = y_n$. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $y_{n+(a,b)} = y_n$.
9. * Кольцо K называется *евклидовым*, если существует такое отображение (*норма*) $N : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, что для любых $a, b \in K \setminus \{0\}$ выполнены два условия:

   (1) $N(ab) \geq N(a)$;

   (2) $\exists\, q, r \in K$, что $a = qb + r$ и либо $r = 0$, либо $N(r) < N(b)$.

   Докажите, что условие (1) определения евклидова кольца не существенно, то есть область целостности, в которой есть норма с условием (2), является евклидовым.
10. * Пусть $D = \mathbb{Z}\left[-\dfrac{1}{2} + \mathfrak{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

    а) Нарисуйте точки D на комплексной плоскости.

    б) Пусть $a, b \in D$, $b \neq 0$. Пусть q — ближайшая точка решётки D к числу a/b. Тогда q — частное при делении a на b с остатком. Как найти r?

    в) Докажите, что $r = 0$ или $N(r) < N(b)$.

Алгоритм Евклида, линейное представление НОД

1. Примените алгоритм Евклида к паре чисел 361, 1007 и найдите коэффициенты $m, k \in \mathbb{Z}$ такие, что $361m + 1007k = (361, 1007)$.
2. Найдите НОД чисел $3^{361} - 1$ и $3^{1007} - 1$.
3. Найдите НОД чисел $\underbrace{11...1}_{361}$ и $\underbrace{11...1}_{1007}$.
4. * Дан многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такой, что $P(t) > 0$ при $t \geq 0$. Последовательность x_n ($n \in \mathbb{N}_0$) задана условиями $x_0 = 0$, $x_n = P(x_{n-1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что для любых натуральных m и k справедливо $(x_m, x_k) = x_{(m,k)}$.
5. Найдите НОД чисел $1 + 17\mathfrak{i}$ и $-8 + 9\mathfrak{i}$ и найдите коэффициенты $m, k \in \mathbb{Z}[\mathfrak{i}]$ такие, что $m(1 + 17\mathfrak{i}) + k(-8 + 9\mathfrak{i}) = (1 + 17\mathfrak{i}, -8 + 9\mathfrak{i})$.
6. При каких n сократима дробь $\dfrac{5n+7}{13n+20}$?
7. * Докажите, что число шагов в алгоритме Евклида для пары $a, b \in \mathbb{N}$ не превосходит $2(\lfloor \log_2 b \rfloor + 1)$.
8. О последовательности y_n ($n \in \mathbb{N}$) известно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $y_{n+a} = y_n$ и $y_{n+b} = y_n$. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $y_{n+(a,b)} = y_n$.
9. * Кольцо K называется *евклидовым*, если существует такое отображение (*норма*) $N : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, что для любых $a, b \in K \setminus \{0\}$ выполнены два условия:

   (1) $N(ab) \geq N(a)$;

   (2) $\exists\, q, r \in K$, что $a = qb + r$ и либо $r = 0$, либо $N(r) < N(b)$.

   Докажите, что условие (1) определения евклидова кольца не существенно, то есть область целостности, в которой есть норма с условием (2), является евклидовым.
10. * Пусть $D = \mathbb{Z}\left[-\dfrac{1}{2} + \mathfrak{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

    а) Нарисуйте точки D на комплексной плоскости.

    б) Пусть $a, b \in D$, $b \neq 0$. Пусть q — ближайшая точка решётки D к числу a/b. Тогда q — частное при делении a на b с остатком. Как найти r?

    в) Докажите, что $r = 0$ или $N(r) < N(b)$.