

МАТЕМАТИКА

Дополнительные главы математики

Шарич Владимир Златкович



Высшая школа экономики

Национальный исследовательский университет

Факультет математики

2018/2019

Общие сведения о курсе:

10 разделов

Раздел = 4 темы и 3 четверга

На занятиях теория + практика

Цели курса:

Представление о математике как науке

Удовольствие от красивых сюжетов

Подготовка к олимпиадам

Программа

1. Исследование процессов

- 1.1 заикливание
- 1.2 инварианты
- 1.3 полуинварианты
- 1.4 алгоритмы

Задача Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много чисел Фибоначчи, кратных n .

2. Арифметика вычетов по модулю

- 2.1 сравнения по модулю
- 2.2 нестандартные признаки делимости
- 2.3 обратимые вычеты, теорема Вильсона
- 2.4 малая теорема Ферма, теорема Эйлера

Задача Какой остаток даёт

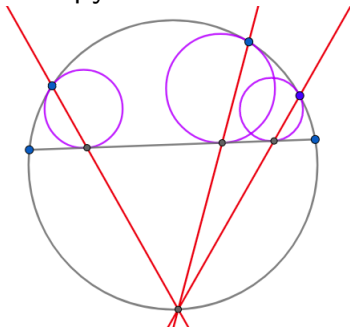
$$2015! = 2015 \cdot 2014 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

при делении на 2017?

3. Преобразования плоскости

- 3.1 движения
- 3.2 гомотетия
- 3.3 инверсия относительно окружности
- 3.4 параллельная и центральная проекции

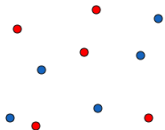
Задача Докажите, что красные прямые пересекаются на окружности.



4. Доказательство существования

- 4.1 конструкция
- 4.2 метод крайнего
- 4.3 принцип Дирихле
- 4.4 непрерывность

Задача На плоскости даны M синих и M красных точек общего положения. Докажите, что можно провести M непересекающихся отрезков, каждый из которых соединял бы красную точку с синей.



5. Задачи в целых числах

- 5.1 линейные диофантовы уравнения
- 5.2 нелинейные диофантовы уравнения
- 5.3 текстовые задачи
- 5.4 задачи с параметрами

Задача Найдите все целые x и y такие, что

$$2^x + 1 = 3^y .$$

6. Векторы и координаты

- 6.1 решение задач с помощью векторов
- 6.2 скалярное произведение,
неравенство Коши-Буняковского-Шварца
- 6.3 векторное произведение и его свойства
- 6.4 плоскости и прямые в пространстве

Задача В тетраэдре $ABCD$ две пары перпендикулярных скрещивающихся рёбер: $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Докажите, что рёбра в третьей паре также перпендикулярны: $AD \perp BC$.

7. Экстремальные задачи

- 7.1 минимум и максимум функции
- 7.2 оценка + пример в комбинаторике
- 7.3 экстремальные задачи в геометрии
- 7.4 экстремальные задачи в теории графов

Задача Какое наибольшее значение принимает выражение

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z ?$$

8. Задачи с параметрами

- 8.1 линейные задачи
- 8.2 квадратичные задачи
- 8.3 тригонометрические задачи
- 8.4 нестандартные задачи

Задача Найдите все значения m , при каждом из которых уравнение

$$2 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + m^2 - 4 = 2m \cos \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)$$

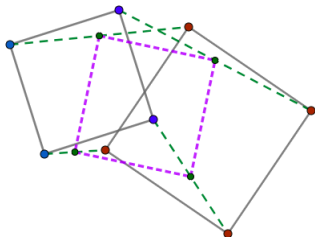
имеет единственное решение.

9. Комплексные числа

- 9.1 геометрия арифметических операций
- 9.2 формула Муавра, правильные многоугольники
- 9.3 преобразования плоскости
- 9.4 решение геометрических задач

Задача $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ — одинаково ориентированные квадраты на плоскости.

Докажите, что середины отрезков A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , D_1D_2 также образуют квадрат.



10. Комбинаторика

- 10.1 правила суммы и произведения
- 10.2 сочетания и размещения, метод шаров и перегородок
- 10.3 элементы теории вероятностей
- 10.4 рекуррентные подсчёты, числа Фибоначчи

Задача При какой наименьшей численности случайной группы людей вероятность совпадения дней рождения у двух из них больше $\frac{1}{2}$?



10 класс

Исследование процессов

Арифметика вычетов по модулю

Преобразования плоскости

Доказательство существования

Задачи в целых числах

Векторы и координаты

Экстремальные задачи

Задачи с параметрами

В конце – углубление

11 класс

В начале – повторение

Комплексные числа

Комбинаторика

Вопросы?

Вопросы есть у меня:

1. Напишите наименьшее натуральное число, состоящее из всех цифр от 0 до 9 и кратное 25.
2. Какой может быть площадь четырёхугольника, диагонали которого имеют длины 5 и 6?
3. Правильную монету подкидывают 5 раз. Какова вероятность того, что орёл выпал ровно трижды?