ПРЕОБРАЗОВАНИЯ: Гомотетия

Демонстрационная задача На плоскости дана окружность ω и точки A и B на ней. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABX таких, что X тоже лежит на окружности ω.

1. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников AMB, BMC, CMD и DMA образуют квадрат.

2. а) Докажите, что в любом треугольнике точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника, а также точки, симметричные ортоцентру относительно середин сторон треугольника, лежат на описанной окружности этого треугольника.

   б) **Окружность девяти точек.** Докажите, что основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром, лежат на одной окружности.

3. Сколько существует окружностей, проходящих через данную точку и вписанных в данный угол? Постройте их с помощью циркуля и линейки.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ: Композиция гомотетий

Демонстрационная задача Докажите, что $\mathcal{H}_{O_1}^{k_1} \circ \mathcal{H}_{O_2}^{k_2}$ — это гомотетия, если $k_1k_2 \neq 1$, и параллельный перенос, если $k_1k_2 = 1$.

1. Дан отрезок AB. Постройте центр гомотетии, равной

   а) $\mathcal{H}_A^2 \circ \mathcal{H}_B^3$; б) $\mathcal{H}_A^{-2} \circ \mathcal{H}_B^3$; в) $\mathcal{H}_A^{1/2} \circ \mathcal{H}_B^3$.

2. На плоскости даны три круга Ω_1, Ω_2, Ω_3 попарно различных радиусов и без общих точек. Пусть P_{6-i-j} — точка пересечения общих касательных к Ω_i и Ω_j. Докажите, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой.

3. *Поворотная гомотетия* — композиция поворота и гомотетии с общим центром, т.е. $\mathcal{R}_O^{\varphi} \circ \mathcal{H}_O^k$.

   Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок CD, является также центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AC в отрезок BD.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ: Гомотетия

Демонстрационная задача На плоскости дана окружность ω и точки A и B на ней. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABX таких, что X тоже лежит на окружности ω.

1. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников AMB, BMC, CMD и DMA образуют квадрат.
2. а) Докажите, что в любом треугольнике точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника, а также точки, симметричные ортоцентру относительно середин сторон треугольника, лежат на описанной окружности этого треугольника.

   б) **Окружность девяти точек.** Докажите, что основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром, лежат на одной окружности.
3. Сколько существует окружностей, проходящих через данную точку и вписанных в данный угол? Постройте их с помощью циркуля и линейки.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ: Композиция гомотетий

Демонстрационная задача Докажите, что $\mathcal{H}_{O_1}^{k_1} \circ \mathcal{H}_{O_2}^{k_2}$ — это гомотетия, если $k_1k_2 \neq 1$, и параллельный перенос, если $k_1k_2 = 1$.

1. Дан отрезок AB. Постройте центр гомотетии, равной

   а) $\mathcal{H}_A^2 \circ \mathcal{H}_B^3$; б) $\mathcal{H}_A^{-2} \circ \mathcal{H}_B^3$; в) $\mathcal{H}_A^{1/2} \circ \mathcal{H}_B^3$.
2. На плоскости даны три круга Ω_1, Ω_2, Ω_3 попарно различных радиусов и без общих точек. Пусть P_{6-i-j} — точка пересечения общих касательных к Ω_i и Ω_j. Докажите, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой.
3. *Поворотная гомотетия* — композиция поворота и гомотетии с общим центром, т.е. $\mathcal{R}_O^{\varphi} \circ \mathcal{H}_O^k$.

   Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок CD, является также центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AC в отрезок BD.