

ПРОЦЕССЫ: Полуинварианты

Демонстрационная задача В плоскости отмечено несколько точек общего положения. Некоторые из них соединены друг с другом отрезками, причем из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменять любую пару пересекающихся отрезков AB и CD парой AC и BD . Обязательно ли такой процесс закончится?

1. В клетках таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце были неотрицательными.
2. В каждом из n регионов правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одном из регионов может поменяться власть. В некотором регионе власть может смениться, только если текущая правящая партия отличается от правящей партии в большинстве (строго больше половины) соседних регионов. Докажите, что смены власти не могут продолжаться бесконечно.
3. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что бурьян не сможет распространиться на все клетки.

ПРОЦЕССЫ: Алгоритмы

Демонстрационная задача В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

1. Есть три бидона ёмкостью 14 л, 9 л и 5 л. В большем бидоне 14 литров молока, остальные бидоны пусты. Как с помощью этих сосудов разлить молоко пополам?
2. Среди 5 внешне одинаковых монет 3 настоящие и 2 фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?
3. В клетках прямоугольной таблицы 13×21 расставлены натуральные числа. За один ход разрешается одновременно удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Докажите, что за несколько ходов можно добиться того, чтобы все числа таблицы стали равными нулю.

ПРОЦЕССЫ: Полуинварианты

Демонстрационная задача В плоскости отмечено несколько точек общего положения. Некоторые из них соединены друг с другом отрезками, причем из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменять любую пару пересекающихся отрезков AB и CD парой AC и BD . Обязательно ли такой процесс закончится?

1. В клетках таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце были неотрицательными.
2. В каждом из n регионов правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одном из регионов может поменяться власть. В некотором регионе власть может смениться, только если текущая правящая партия отличается от правящей партии в большинстве (строго больше половины) соседних регионов. Докажите, что смены власти не могут продолжаться бесконечно.
3. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что бурьян не сможет распространиться на все клетки.

ПРОЦЕССЫ: Алгоритмы

Демонстрационная задача В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

1. Есть три бидона ёмкостью 14 л, 9 л и 5 л. В большем бидоне 14 литров молока, остальные бидоны пусты. Как с помощью этих сосудов разлить молоко пополам?
2. Среди 5 внешне одинаковых монет 3 настоящие и 2 фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?
3. В клетках прямоугольной таблицы 13×21 расставлены натуральные числа. За один ход разрешается одновременно удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Докажите, что за несколько ходов можно добиться того, чтобы все числа таблицы стали равными нулю.