

Гомотетия на плоскости

1. Точки K и L на сторонах соответственно AB и AC остроугольного треугольника ABC таковы, что $KL \parallel BC$; M — точка пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках K и L к отрезкам AB и AC . Докажите, что точки A , M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.
2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM , BCM , CDM и DAM образуют квадрат.
3. (а) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H , а M — середина отрезка AC . Луч HM пересекает описанную около ABC окружность в точке N . Покажите, что M — середина отрезка HN .
(б) **Окружность девяти точек.** В треугольнике ABC отметили 9 точек: основания высот, середины сторон, и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром. Докажите, что все эти точки лежат на одной окружности.
4. На плоскости дана окружность Ω и точки A и B на ней. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABX , таких что X тоже лежит на окружности Ω .
5. Сколько существует окружностей, проходящих через данную точку и вписанных в данный угол? Постройте их с помощью циркуля и линейки.
6. Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей невписанной окружностью лежат на одной прямой.
7. (а) На плоскости даны две окружности. Найдите все гомотетии, переводящие одну из них в другую.
(б) **Лемма Архимеда.** Большая окружность Ω внутренним образом касается меньшей окружности ω в точке M . Хорда AB окружности Ω касается ω в точке P . Докажите, что MP — биссектриса треугольника AMB .

Гомотетия на плоскости

1. Точки K и L на сторонах соответственно AB и AC остроугольного треугольника ABC таковы, что $KL \parallel BC$; M — точка пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках K и L к отрезкам AB и AC . Докажите, что точки A , M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.
2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM , BCM , CDM и DAM образуют квадрат.
3. (а) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H , а M — середина отрезка AC . Луч HM пересекает описанную около ABC окружность в точке N . Покажите, что M — середина отрезка HN .
(б) **Окружность девяти точек.** В треугольнике ABC отметили 9 точек: основания высот, середины сторон, и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром. Докажите, что все эти точки лежат на одной окружности.
4. На плоскости дана окружность Ω и точки A и B на ней. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABX , таких что X тоже лежит на окружности Ω .
5. Сколько существует окружностей, проходящих через данную точку и вписанных в данный угол? Постройте их с помощью циркуля и линейки.
6. Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей невписанной окружностью лежат на одной прямой.
7. (а) На плоскости даны две окружности. Найдите все гомотетии, переводящие одну из них в другую.
(б) **Лемма Архимеда.** Большая окружность Ω внутренним образом касается меньшей окружности ω в точке M . Хорда AB окружности Ω касается ω в точке P . Докажите, что MP — биссектриса треугольника AMB .