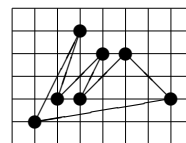
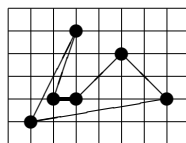
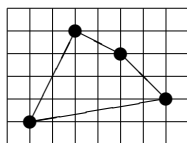
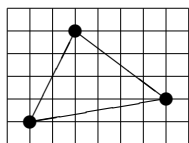


## ФОРМУЛА ПИКА

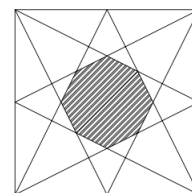
$$S = N_{\text{внутри}} + \frac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1$$

- (1) Длина стороны клетки равна 1. Вычислите площадь фигуры:



- (2) Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.
- (3) Докажите, что площадь любого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, не содержащего узлы ни внутри, ни на границе (за исключением вершин), равна  $1/2$ .
- (4) Пусть произвольный многоугольник  $M$  с вершинами в узлах клетчатой бумаги разбит на несколько многоугольников  $M_1, M_2, \dots, M_k$  с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Докажите, что если для  $M_1, M_2, \dots, M_k$  справедлива формула Пика, то для  $M$  — тоже.

Середины сторон квадрата соединены отрезками с вершинами так, как это показано на рисунке. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.

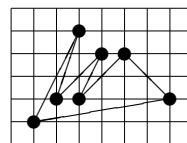
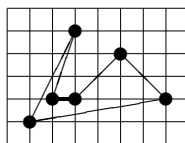
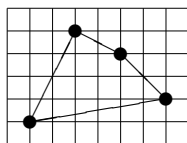
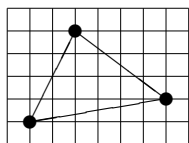


- (5) Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то еще узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
- (7) Какие правильные многоугольники могут иметь все вершины в узлах клетчатой бумаги?
- (8) Докажите, что квадрат со стороной  $n$  не может накрыть более  $(n + 1)^2$  точек целочисленной решётки.
- (9) На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник  $ABCDE$  с вершинами в целых точках. Диагонали этого пятиугольника пересекаются в точках  $P, Q, R, S, T$ . Докажите, что внутри или на границе пятиугольника  $PQRST$  есть хотя бы одна целая точка.

## ФОРМУЛА ПИКА

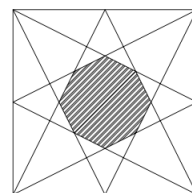
$$S = N_{\text{внутри}} + \frac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1$$

- (1) Длина стороны клетки равна 1. Вычислите площадь фигуры:



- (2) Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.
- (3) Докажите, что площадь любого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, не содержащего узлы ни внутри, ни на границе (за исключением вершин), равна  $1/2$ .
- (4) Пусть произвольный многоугольник  $M$  с вершинами в узлах клетчатой бумаги разбит на несколько многоугольников  $M_1, M_2, \dots, M_k$  с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Докажите, что если для  $M_1, M_2, \dots, M_k$  справедлива формула Пика, то для  $M$  — тоже.

Середины сторон квадрата соединены отрезками с вершинами так, как это показано на рисунке. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.



- (5) Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то еще узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
- (7) Какие правильные многоугольники могут иметь все вершины в узлах клетчатой бумаги?
- (8) Докажите, что квадрат со стороной  $n$  не может накрыть более  $(n+1)^2$  точек целочисленной решетки.
- (9) На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник  $ABCDE$  с вершинами в целых точках. Диагонали этого пятиугольника пересекаются в точках  $P, Q, R, S, T$ . Докажите, что внутри или на границе пятиугольника  $PQRST$  есть хотя бы одна целая точка.