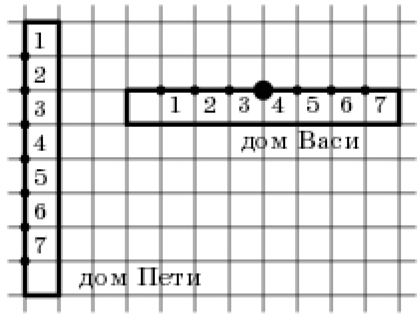
Геометрия на клетчатой бумаге

(1) На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4. Отметьте ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток.

(2) Петя и Вася живут в соседних домах (см. план на рисунке). Вася живет в четвёртом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путем (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя.



(3) На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 1×4. Покажите, как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на три равные части.

(4) Можно ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами расположить так, чтобы его вершины лежали в узлах целочисленной решетки, но ни одна из его сторон не проходила по линиям решетки?

(5) На клетчатой бумаге нарисован выпуклый пятиугольник с целыми сторонами. Докажите, что его периметр — четное число.

(6) Мистер Клеточкин сделал из листа клетчатой бумаги календарь на август 2017 года и заметил, что центры клеток 10, 20 и 30 августа образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Клеточкин предположил, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Прав ли он?

Теорема Ферма-Эйлера и суммы двух квадратов

$*$ Пусть p, q — простые числа, $p \equiv_4 1$, $q \equiv_4 3$.

(1) Докажите, что $(p-1)! \equiv_p -1$.

(2) Докажите, что найдется целое z, такое что $z^2 + 1 \vdots p$.

(3) Пусть $z^2 + 1 = cp$. Рассмотрим фигуру $px^2 + 2zxy + cy^2 < t$ на декартовой координатной плоскости Oxy.

   (a) Чем является эта фигура?

   (b) Какова её площадь (в зависимости от p, z, c, t)?

   (c) Докажите, что уравнение $px^2 + 2zxy + cy^2 = 1$ имеет ненулевое целочисленное решение (x, y).

(4) Докажите, что p представимо в виде суммы двух квадратов.

(5) Докажите, что не существует целого z такого, что $z^2 + 1 \vdots q$.

(6) Докажите, что если $x^2 + y^2 \vdots q$, то $x \vdots q$, $y \vdots q$.

(7) Докажите, что произведение двух чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, тоже представимо в виде суммы двух квадратов.

!!! $\quad \exists a, b \in \mathbb{Z} \;\; 2^{\omega} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_m^{\beta_m} = a^2 + b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \mu \;\; \beta_\mu \vdots 2.$