

ОЦЕНКИ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

- (1) На клетчатой бумаге нарисован выпуклый пятиугольник с вершинами в узлах сетки. Докажите, что внутри его или на границе найдется хотя бы еще один узел, отличный от вершины.
- (2) По линиям сетки построен прямоугольник 1000×2000 . Можно ли в прямоугольнике провести по линиям сетки замкнутую ломаную, которая ровно один раз проходила бы через каждый узел сетки, расположенный внутри или на границе прямоугольника? Если можно, то какова её длина?
- (3) На шахматной доске размером 8×8 отмечены 64 точки – центры всех клеток. Можно ли отделить все точки друг от друга, проведя 13 прямых, не проходящих через эти точки?
- (4) Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?
- (5) На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых, точки пересечения которых называются “узлами”, “звеном” мы будем называть отрезок прямой, соединяющий два соседних узла одной прямой. Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы после этого в каждом узле сходилась не более трёх звеньев?

ПЯТНА НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

- ! На клетчатой бумаге дано множество площади меньше 1. Докажите, что его можно сдвинуть так, чтобы оно не покрывало ни одного узла.
- !! На клетчатой бумаге дано множество площади больше n . Докажите, что его можно сдвинуть так, чтобы оно покрывало хотя бы $n + 1$ узлов.
- !!! Один из узлов клетчатой бумаги (назовем его O) является центром симметрии выпуклой фигуры площадью более 4. Докажите, что эта фигура содержит хотя бы один узел, отличный от O .
- (1) Во всех узлах целочисленной решетки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус r . Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.
 - (2) Постройте выпуклое множество, содержащее бесконечно много узлов клетчатой бумаги, но не содержащее бесконечного множества коллинеарных узлов.
 - (3) Несколько точек на плоскости расположены так, что расстояние между любыми двумя из них больше 2. Доказать, что любое множество площади меньше π можно параллельно перенести по плоскости на вектор длины меньше 1 так, чтобы оно не содержало ни одной из данных точек.

ОЦЕНКИ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

- (1) На клетчатой бумаге нарисован выпуклый пятиугольник с вершинами в узлах сетки. Докажите, что внутри его или на границе найдется хотя бы еще один узел, отличный от вершины.
- (2) По линиям сетки построен прямоугольник 1000×2000 . Можно ли в прямоугольнике провести по линиям сетки замкнутую ломаную, которая ровно один раз проходила бы через каждый узел сетки, расположенный внутри или на границе прямоугольника? Если можно, то какова её длина?
- (3) На шахматной доске размером 8×8 отмечены 64 точки – центры всех клеток. Можно ли отделить все точки друг от друга, проведя 13 прямых, не проходящих через эти точки?
- (4) Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?
- (5) На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых, точки пересечения которых называются “узлами”, “звеном” мы будем называть отрезок прямой, соединяющий два соседних узла одной прямой. Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы после этого в каждом узле сходилась не более трёх звеньев?

ПЯТНА НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

- ! На клетчатой бумаге дано множество площади меньше 1. Докажите, что его можно сдвинуть так, чтобы оно не покрывало ни одного узла.
- !! На клетчатой бумаге дано множество площади больше n . Докажите, что его можно сдвинуть так, чтобы оно покрывало хотя бы $n + 1$ узлов.
- !!! Один из узлов клетчатой бумаги (назовем его O) является центром симметрии выпуклой фигуры площадью более 4. Докажите, что эта фигура содержит хотя бы один узел, отличный от O .
- (1) Во всех узлах целочисленной решетки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус r . Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.
 - (2) Постройте выпуклое множество, содержащее бесконечно много узлов клетчатой бумаги, но не содержащее бесконечного множества коллинеарных узлов.
 - (3) Несколько точек на плоскости расположены так, что расстояние между любыми двумя из них больше 2. Доказать, что любое множество площади меньше π можно параллельно перенести по плоскости на вектор длины меньше 1 так, чтобы оно не содержало ни одной из данных точек.