Графы, часть 3: графы на двумерных поверхностях

> Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер. *Гранью* планарного графа называется часть плоскости, в том числе и внешняя, ограниченная ребрами. Подробнее, это значит, что любые две точки грани можно соединить непрерывной ломаной без пересечения ребер.
> Введем обозначения. Пусть P – количество ребер, B – количество вершин, $Г$ – количество граней в графе.

1. Докажите, что для дерева выполняется $B - P + Г = 2$.

2. Докажите, что в связном графе при добавлении ребра количество граней увеличивается на 1.

3. Докажите, что в связном планарном графе выполняется $B - P + Г = 2$.

4. Докажите, что в планарном графе $B - P + Г = K + 1$, где K – количество компонент связности.

5. Докажите, что в связном планарном графе, в котором $B \geqslant 3$, справедливо неравенство $2P \geqslant 3Г$.
Докажите следствие: $P \leqslant 3B - 6$.

> *Полный граф с n вершинами* (обозначается K_n) – это граф, каждая из n вершин которого соединена с каждой.

6. Докажите, что в K_n выполняется $P = 1 + 2 + \ldots + (n - 1)$.
Пользуясь этим, докажите тождество $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1) / 2$.

7. В компании n сотрудников и каждый дружит ровно с m другими. При каких n и m это возможно?

8. В компании $4n + 1$ человек. Возможно ли, что в этой компании у каждой пары друзей есть общий враг, а у каждой пары врагов – общий друг?

9. В компании n человек. Среди любых троих есть пара друзей и пара врагов. Докажите, что пар друзей в этой компании не менее $n(n - 1) / 6$.

10. Докажите, что граф на 15 вершин со степенями вершин не менее 7, связен.

11. Докажите, что на плоскости нельзя нарисовать полный граф с пятью вершинами и непересекающимися ребрами (K_5 не планарный).

12. Нарисуйте K_5 на поверхности тора так, чтобы его ребра не пересекались.

> А для какого наибольшего n можно нарисовать K_n на поверхности тора с непересекающимися ребрами? Ответ на этот вопрос – уже совсем другая история...