Графы, часть 2: циклы, мосты, деревья, остовы

> *Цикл* в графе – это *путь* из вершины в саму себя без повторяющихся ребер, но хотя бы с одним ребром.
> *Мост* – это ребро, при удалении которого увеличивается количество компонент связности.
> *Деревом* называется связный граф без циклов.
> Вершина графа называется *висячей*, если ее степень равна 1.

1. Докажите, что в любом графе каждое ребро либо является мостом, либо входит в цикл.

2. Докажите равносильность определения дерева и следующих утверждений:
а) между любыми двумя вершинами существует единственный путь по ребрам.
б) граф связный и любое ребро в нем – мост.
в) граф связный, имеет n вершин и $n-1$ ребро.
г) граф не содержит циклов, имеет n вершин и $n-1$ ребро.

3. В дереве есть не менее двух вершин. Докажите, что
а) в нем найдется *висячая вершина*, то есть вершина степени 1.
б) таких вершин найдется две.

4. Маньяк Вася по одной перерезает веревочки волейбольной сетки, имеющей вид прямоугольника $m \times n$. Какое наибольшее количество веревочек он может разрезать до того, как сетка распадется на куски?

5. По сторонам клеток шахматной доски выложены спички длиной в сторону клетки. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы ладья могла пройти из любой клетки до любой другой?

> *Остов* связного графа – это подграф, содержащий все его вершины и являющийся деревом.

6. а) Может ли граф иметь несколько различных остовов?
б) Существует ли граф, два остова которого не имеют общих ребер?

7. В связном графе есть не менее двух вершин. Докажите, что
а) Можно удалить одну вершину и все ее ребра так, чтобы граф не потерял связность.
б) Таких вершин можно удалить две.
в) Если есть вершина степени n, то можно отметить n вершин так, чтобы при удалении любой комбинации отмеченных вершин граф не потерял связность.

> *Покрасить* вершины графа *правильным образом* означает, что при такой раскраске нет вершин одного цвета, соединенных ребром.
> Граф называется *двудольным*, если его можно покрасить в два цвета правильным образом.

8. Докажите: граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем все циклы имеют четную длину.

9. На занятии 20 школьников решили каждый по а) 2 б) 6 задач, причем каждая задача была решена ровно двумя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор всех задач так, чтобы каждый школьник рассказал ровно по а) 1 б) 3 задачи.

10. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?