

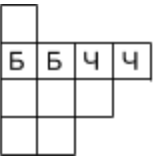
Графы, часть 1: понятие графа, степень вершины, связность

Будем говорить, что задан *граф*, если задано множество его *вершин* и про любую пару различных вершин сказано, связаны они *ребром* или нет. На рисунке вершины изображаются точками или кружками, а ребра отрезками или кривыми.

Количество ребер, выходящих из данной вершины, будем называть ее *степенью*.

- а) Докажите, что по итогам однокругового турнира всегда найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число игр вничью.
б) Докажите, что в нашей группе есть два школьника, у которых поровну друзей в этой группе.
в) Докажите, что у каждого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.
- Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами есть путь по ребрам. *Компонентой связности* называется часть графа (подграф), состоящая из всех вершин, которые соединены путем с некоторой данной вершиной, а также всех ребер, их соединяющих.

- На нарисованной справа доске расположены два белых и два черных коня. Коней разрешается переставлять по правилам шахматной игры. Можно ли поменять местами белых коней с черными?

Б	Б	Ч	Ч	
- На сколько компонент связности распадается граф слона на шахматной доске? Граф слона состоит из вершин, обозначающих клетки доски, и ребер, соединяющие вершины, если с одной из них можно за один ход попасть на другую.
- Лемма о рукопожатии.** Докажите, что количество людей сделавших нечетное количество рукопожатий на Земле – четно.
Указание. Посчитайте число ребер в графе, если известны степени всех его вершин.
Упражнение. В графе подписали степени всех его вершин и стерли все ребра. Всегда ли можно его однозначно восстановить?
Следствие 1. В любом графе сумма степеней вершин четна.
Следствие 2. В каждой компоненте связности сумма степеней вершин четна.
- Можно ли придумать 9 таких слов, что у каждого хотя бы 2 общие буквы ровно с 3 другими?
- В группе 15 человек. Может ли быть так, что 5 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 4 – по 4 друга, а 6 – по 5 друзей?
- Степень каждой вершины связного графа не менее 100. Одно ребро выкинули. Может ли получиться несвязный граф?

9. Докажите, что связный граф, в котором степень каждой вершины четна, при удалении любого ребра остается связным.

10. Существует ли 8-вершинный граф, степени вершин которого равны

а) 8, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1?

в) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1?

б) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1?

г) 7, 6, 4, 3, 4, 4, 1, 2?

11. На нарисованной справа доске расположены два белых и два черных коня. Коней разрешается переставлять по правилам шахматной игры. Можно ли поставить белых коней в верхние углы, а черных – в нижние?

Б		Ч
Ч		Б

12. Существует ли 169-звенная замкнутая ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно 13 раз (пересечения в вершинах не допускаются)?

13. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на три.

14. Грани некоторого многогранника раскрашены в два цвета так, что соседние грани имеют разные цвета. Известно, что все грани, кроме одной, имеют число ребер, кратное трем. Доказать, что и эта одна грань имеет кратное трем число ребер.

15*. На праздник пришло 8 семейных пар. Один из гостей спросил всех остальных, каково число их знакомых на этом празднике и получил все ответы от 1 до 15. Скольких гостей знает он сам? Скольких – его жена? Если один гость знаком с другим – это всегда взаимно. В каждой паре муж и жена, конечно, знакомы друг с другом.