



Восьмая Зимняя олимпиадная школа

МФТИ, 4-14 января 2017 года

Лемма о трезубце и окружность 9 точек

1. Лемма о куриной лапке.

Треугольник ABC вписан в окружность ω ; точки I, I_a, I_b, I_c — центр вписанной и центры вневписанных окружностей.

- (а) **Здоровая.** Пусть M — середина дуги AB окружности ω , не содержащей точку C . Докажите, что M равноудалена от A, B, I, I_c .
- (б) **Сломанная.** Пусть N — середина дуги AB окружности ω , содержащей точку C . Докажите, что N равноудалена от A, B, I_a, I_b .

2. Постройте треугольник по центру описанной окружности O , центру вписанной окружности I и вершине C .

3. На «меньших» дугах AB, AC описанной окружности треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACN равноудалены от середины дуги BAC .

4. **Окружность 9 точек.** Точки A, B, C, D — вершины и ортоцентр треугольника Δ . Пусть ω — описанная окружность его ортотреугольника.

- (а) Докажите, что ω содержит середины всех $C_4^2 = 6$ отрезков с концами в точках A, B, C, D .
- (б) Докажите, что центр ω находится посередине между ортоцентром и центром описанной окружности треугольника Δ , а радиус ω вдвое меньше радиуса окружности, описанной около любого из треугольников ABC, BCD, CDA, DAB .

5. Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H . Пусть $A\hat{A}, B\hat{B}, C\hat{C}$ — его высоты; A', B', C' — середины соответствующих сторон; A^*, B^*, C^* — середины отрезков AH, BH, CH соответственно. Докажите, что

- (а) $\hat{A}\hat{B} \perp C'C^*, \hat{B}\hat{C} \perp A'A^*, \hat{C}\hat{A} \perp B'B^*$;
- (б) отрезки $A'A^*, B'B^*, C'C^*$ пересекаются в одной точке.

Задачи для самостоятельного решения

6. Постройте треугольник по центру описанной окружности O и центрам двух вневписанных окружностей I_a и I_b .

7. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA, DAB . Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.

8. Дан треугольник ABC , O — центр его описанной окружности, O_c, O_a и O_b — точки, симметричные точке O относительно прямых AB, BC и AC соответственно. Докажите, что середины сторон треугольника $O_aO_bO_c$ лежат на окружности 9 точек треугольника ABC .



Восьмая Зимняя олимпиадная школа

МФТИ, 4-14 января 2017 года

Лемма о трезубце и окружность 9 точек

1. Лемма о куриной лапке.

Треугольник ABC вписан в окружность ω ; точки I, I_a, I_b, I_c — центр вписанной и центры вневписанных окружностей.

- (а) **Здоровая.** Пусть M — середина дуги AB окружности ω , не содержащей точку C . Докажите, что M равноудалена от A, B, I, I_c .
- (б) **Сломанная.** Пусть N — середина дуги AB окружности ω , содержащей точку C . Докажите, что N равноудалена от A, B, I_a, I_b .

2. Постройте треугольник по центру описанной окружности O , центру вписанной окружности I и вершине C .

3. На «меньших» дугах AB, AC описанной окружности треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACN равноудалены от середины дуги BAC .

4. **Окружность 9 точек.** Точки A, B, C, D — вершины и ортоцентр треугольника Δ . Пусть ω — описанная окружность его ортотреугольника.

- (а) Докажите, что ω содержит середины всех $C_4^2 = 6$ отрезков с концами в точках A, B, C, D .
- (б) Докажите, что центр ω находится посередине между ортоцентром и центром описанной окружности треугольника Δ , а радиус ω вдвое меньше радиуса окружности, описанной около любого из треугольников ABC, BCD, CDA, DAB .

5. Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H . Пусть $A\hat{A}, B\hat{B}, C\hat{C}$ — его высоты; A', B', C' — середины соответствующих сторон; A^*, B^*, C^* — середины отрезков AH, BH, CH соответственно. Докажите, что

- (а) $A\hat{B} \perp C'C^*, B\hat{C} \perp A'A^*, C\hat{A} \perp B'B^*$;
- (б) отрезки $A'A^*, B'B^*, C'C^*$ пересекаются в одной точке.

Задачи для самостоятельного решения

6. Постройте треугольник по центру описанной окружности O и центрам двух вневписанных окружностей I_a и I_b .

7. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA, DAB . Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.

8. Дан треугольник ABC , O — центр его описанной окружности, O_c, O_a и O_b — точки, симметричные точке O относительно прямых AB, BC и AC соответственно. Докажите, что середины сторон треугольника $O_a O_b O_c$ лежат на окружности 9 точек треугольника ABC .