Теорема Эйлера: пусть q — любое натуральное число и НОД (n; q) =1. Тогда $n^{\varphi(q)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$. (НОД (a; b) = c часто записывают просто как (a; b) = c)

1. Пусть $N = p^{\beta 1}\, p^{\beta 2}\, p^{\beta 3}$. Найти количество чисел, меньших N и взаимно простых с ним.
2. Пусть p — простое число, p > 2. Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид 2kp + 1.
3. Докажите, что для любого простого p разность

$$\underbrace{11\ldots11}_{p}\underbrace{22\ldots22}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots99}_{p} - 123456789$$

делится на p.

4. Докажите, что для любого нечётного n, число $2^{n!} - 1$ делится на n.
5. Число x таково, что x^2 заканчивается на 001 (в десятичной системе счисления). Найдите три последние цифры числа x (укажите все возможные варианты).
6. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.

Домашнее задание.

1. Пусть $N = p^{\beta 1}\ p^{\beta 2}\, p^{\beta 3} \ldots p^{\beta n}$ Найти количество чисел, меньших N и взаимно простых с ним. (Вывести формулу для вычисления функции Эйлера φ(N))
2. При помощи теоремы Эйлера найдите число x, удовлетворяющее сравнению $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$, где $(a, m) = 1$.
3. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если (a, 561) = 1, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv 1 (\mathrm{mod}561)$. Числа, обладающие этим свойством, называются числами Кармайкла.