Малая теорема Ферма. Функция Эйлера.

Малая Теорема Ферма. Пусть p — простое число, тогда для любого натурального n: $n^p - n \vdots p$ (или $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$).

1. Найдите остаток от деления 2^{100} на 101.
2. Найдите остаток от деления 3^{102} на 101.
3. Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.
4. Пусть p и q – различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$;
5. Известно, что $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12}$ делится на 13 (*a, b, c, d, e, f* – целые числа). Докажите, что *abcdef* делится на 13^6.

Функция Эйлера φ(*n*) определяется как количество чисел от 1 до *n*, взаимно простых с *n*.

6. Найдите: а) φ (17); б) φ (p); в) φ (p^2); г) φ (p^α).
7. Решите уравнения
   а) φ (5^x) = 100; б) φ (7^x) = 294; в) φ ($3^x \cdot 5^y$) = 600.
8. Решите уравнения
   а) φ (x) = $\frac{x}{2}$; б) φ (x) = $\frac{x}{3}$.
9. Решите уравнения
   а) φ (x) = 2; б) φ (x) = 8; в) φ (x) = 12.

Домашнее задание.

1. Найдите остаток от деления числа 6^{102} на 101.
2. Пусть p и q – различные простые числа. Докажите, что $\left[\frac{p^q+q^p}{pq}\right]$ – чётное число, если $p, q \neq 2$.
3. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.
4. Решите уравнения: а) φ (x) = $\frac{x}{4}$; б) φ (x) = 14