

# МАТЕМАТИКА

## Задачи с параметрами на ЕГЭ и перечневых олимпиадах

Шарич Владимир Златкович



СИРИУС 2017

# Шарич Владимир Златкович

'95—'00 участник и призёр олимпиад по математике

'00—'05 студент мехмата МГУ, специалитет

'03—'16 молод и полон энергии

- ▶ преподаватель в специализированных классах (Л2Ш, СУНЦ МГУ, ТЛ«2x2», ЦДО, МГ, ФЛ)
- ▶ преподаватель на сезонных школах (Киров, Кострома, Москва, Камчатка, Казахстан, Сербия, Беларусь, Корея)
- ▶ член жюри турниров и олимпиад (УТЮМ, КОЛМ, ФЕСТ, ЮМТ, ВМО, ММО, ТГ)
- ▶ руководитель методкомиссии Математического многоборья

'15—'17 студент МФТИ, магистратура «Advanced Combinatorics»

'16—.... зав кафедрой математики онлайн-школы «Фоксфорд»

'17—.... сотрудник программы «Математическое образование»



**Фоксфорд**



**Высшая школа экономики**

Национальный исследовательский университет



**Математическая  
школа**

Шарич В.З., [mathschool.ru/sharich](https://mathschool.ru/sharich)



**Центр  
Педагогического  
Мастерства**



# Геометрия параметров

Какие прямые задаются уравнением

$$kx + (1 - k)y = 1$$

при  $k \in \mathbb{R}$ ?

Если в уравнении прямой

$$ax + by + c = 0$$

коэффициенты зависят от параметра

*линейным образом,*

то эти прямые образуют один пучок,  
т.е. либо пересекаются в одной точке,  
либо параллельны друг другу.

Опишите изменение графика квадратной функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

при изменении коэффициента  $c$ .

Опишите изменение графика квадратной функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

при изменении коэффициента  $c$ .

ОТВЕТ:

График перемещается «по вертикали»  
(т.е. вдоль оси  $Oy$ ).

Опишите изменение графика квадратной функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

при изменении коэффициента  $b$ .

Опишите изменение графика квадратной функции

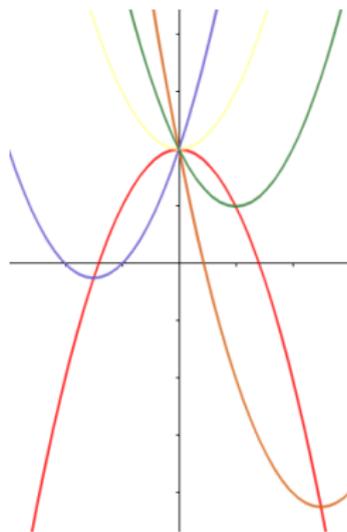
$$y = ax^2 + bx + c$$

при изменении коэффициента  $b$ .

ОТВЕТ:

График не меняет форму, всегда проходит через точку  $(0, c)$ , а его вершина перемещается по параболе

$$y = -ax^2 + c.$$



Опишите изменение графика квадратной функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

при изменении коэффициента  $a$ .

Опишите изменение графика квадратной функции

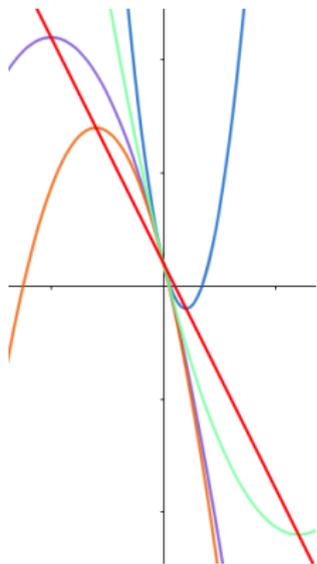
$$y = ax^2 + bx + c$$

при изменении коэффициента  $a$ .

ОТВЕТ:

График меняет форму, всегда проходит через точку  $(0, c)$  и в этой точке касается прямой  $y = bx + c$ , а его вершина перемещается по прямой

$$y = \frac{b}{2}x + c.$$



Если в уравнении параболы

$$y = ax^2 + bx + c$$

коэффициенты зависят от параметра  
*линейным образом, причём  $a \neq const$ ,*  
то эти параболы имеют две общие точки  
(возможно, совпадающие).

Опишите изменение графика дробно-линейной функции

$$y = a + \frac{b}{x - c}$$

при изменениях каждого из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в отдельности.

Опишите изменение графика дробно-линейной функции

$$y = a + \frac{b}{x - c}$$

при изменениях каждого из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в отдельности.

ОТВЕТ:

Изменение  $a$  приводит к перемещению вдоль  $Oy$ .

Опишите изменение графика дробно-линейной функции

$$y = a + \frac{b}{x - c}$$

при изменениях каждого из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в отдельности.

ОТВЕТ:

Изменение  $a$  приводит к перемещению вдоль  $Oy$ .

Изменение  $b$  приводит к растяжению / сжатию.

Опишите изменение графика дробно-линейной функции

$$y = a + \frac{b}{x - c}$$

при изменениях каждого из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в отдельности.

ОТВЕТ:

Изменение  $a$  приводит к перемещению вдоль  $Oy$ .

Изменение  $b$  приводит к растяжению / сжатию.

Изменение  $c$  приводит к перемещению вдоль  $Ox$ .

Опишите изменение графика квадратичной зависимости

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

при изменениях каждого из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в отдельности.

Опишите изменение графика квадратичной зависимости

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

при изменениях каждого из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в отдельности.

ОТВЕТ:

Изменение  $a$  приводит к перемещению вдоль  $Ox$ .

Опишите изменение графика квадратичной зависимости

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

при изменениях каждого из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в отдельности.

ОТВЕТ:

Изменение  $a$  приводит к перемещению вдоль  $Ox$ .

Изменение  $b$  приводит к перемещению вдоль  $Oy$ .

Опишите изменение графика квадратичной зависимости

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

при изменениях каждого из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в отдельности.

ОТВЕТ:

Изменение  $a$  приводит к перемещению вдоль  $Ox$ .

Изменение  $b$  приводит к перемещению вдоль  $Oy$ .

Изменение  $c$  приводит к растяжению / сжатию.

Вообще гипербола

$$y = a + \frac{b}{x - c}$$

и окружность

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

— довольно скучные фигуры.

## Методы **обработки касания**

на примере окружности и прямой:

- ▶ система имеет одно решение;
- ▶ радиус, проведенный в общую точку, перпендикулярен прямой;
- ▶ расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу;
- ▶ в общей точке производные равны.

**ЗАДАЧА.**

При каких  $d$  окружность  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$  касается прямой  $3x + 4y = d$ ?

Источник: ОММО, 2014 год, 8 задача

Найдите все значения параметра  $k$ , при каждом из которых уравнение

$$|\ln |x|| = kx$$

имеет ровно три решения.

Источник: ОММО, 2014 год, 8 задача

Найдите все значения параметра  $k$ , при каждом из которых уравнение

$$|\ln |x|| = kx$$

имеет ровно три решения.

ОТВЕТ:  $k \in \left(-\frac{1}{e}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{e}\right)$

# Алгебра параметров

Источник: ПВГ, 2014 год, Иркутск, 5 задача

Найдите все значения  $m$ , при каждом из которых уравнение

$$2 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + m^2 - 4 = 2m \cos \left( \frac{x^2 - 1}{2x} \right)$$

имеет единственное решение.

Источник: ПВГ, 2014 год, Иркутск, 5 задача

Найдите все значения  $m$ , при каждом из которых уравнение

$$2 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + m^2 - 4 = 2m \cos \left( \frac{x^2 - 1}{2x} \right)$$

имеет единственное решение.

ОТВЕТ:  $m = 0$  или  $m = 3$

Источник: МОЗГ, 2017 год, Сириус, 8 этаж

При каких значениях  $t$  уравнение

$$\frac{6x^2}{2x^3 + 1} = 7 + 5 \sin(x - t)$$

имеет хотя бы одно положительное решение?

Источник: МОЗГ, 2017 год, Сириус, 8 этаж

При каких значениях  $t$  уравнение

$$\frac{6x^2}{2x^3 + 1} = 7 + 5 \sin(x - t)$$

имеет хотя бы одно положительное решение?

ОТВЕТ:  $t = 1 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

# Алгебраические методы:

изучить множество значений  
подобрать инволютивную операцию  
преобразовать и/или сделать замену

... и, конечно, **Литература**

«Математика. Задачи с ответами и решениями.  
Пособие для поступающих в вузы»

(Сергеев И.Н.)

«Методы решения задач с параметрами»

(Натяганов В.Л., Лужина Л.М.)

# Удачных занятий математикой!

Шарич В.З.  
sharich@mathschool.ru



Фоксфорд



Высшая школа экономики

Национальный исследовательский университет



Математическая  
школа



Центр  
Педагогического  
Мастерства