Инверсия и ортогональность

1. Пусть фигуры φ, ψ – обобщенные окружности (т.е. каждая из фигур – окружность либо прямая). Докажите, что угол между φ и ψ равен углу между образами этих фигур при инверсии.

2. Окружности δ и ω различны. Докажите, что δ переходит в себя при инверсии относительно окружности ω тогда и только тогда, когда $\omega \perp \delta$.

3. Дана окружность ω. Докажите, что точки P и Q инверсны относительно ω, если и только если
$$\forall \delta \perp \omega \quad P \in \delta \Longleftrightarrow Q \in \delta \ .$$

4. На плоскости даны окружности γ и ω. $\widehat{\gamma} = \psi_\omega(\gamma)$. Докажите, что
$$\psi_\gamma \circ \psi_\omega \circ \psi_\gamma = \psi_{\widehat{\gamma}} \ .$$

5. Докажите, что две непересекающиеся окружности (или непересекающиеся окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

6. **Поризм Штейнера.**

   Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2. Пусть окружность σ касается их обеих.

   Определим цепочку окружностей σ_k $(k = 0, 1, 2, ...)$: $\sigma_0 = \sigma$, для всякого $k \geq 1$ окружность σ_k (отличная от σ_{k-2} при $k \geq 2$) касается ω_1, ω_2 и σ_{k-1}.

   Назовем σ *хорошей порядка* n, если для некоторого натурального n (зависящего от σ) окружность σ_n совпала с исходной окружностью σ.

   Докажите, что если есть хотя бы одна хорошая окружность порядка n, то любая окружность, касающаяся ω_1 и ω_2, хорошая порядка n.

7. Циркулем и линейкой постройте образ данной точки при инверсии относительно данной окружности.

8. **Задача Аполлония.**

   Постройте циркулем и линейкой окружность, прямую или точку, имеющую ровно одну общую точку с каждой из трёх данных окружностей, прямых или точек. (Разберите все возможные случаи.)

Инверсия и ортогональность

1. Пусть фигуры φ, ψ – обобщенные окружности (т.е. каждая из фигур – окружность либо прямая). Докажите, что угол между φ и ψ равен углу между образами этих фигур при инверсии.

2. Окружности δ и ω различны. Докажите, что δ переходит в себя при инверсии относительно окружности ω тогда и только тогда, когда $\omega \perp \delta$.

3. Дана окружность ω. Докажите, что точки P и Q инверсны относительно ω, если и только если
$$\forall \delta \perp \omega \quad P \in \delta \Longleftrightarrow Q \in \delta \ .$$

4. На плоскости даны окружности γ и ω. $\widehat{\gamma} = \psi_\omega(\gamma)$. Докажите, что
$$\psi_\gamma \circ \psi_\omega \circ \psi_\gamma = \psi_{\widehat{\gamma}} \ .$$

5. Докажите, что две непересекающиеся окружности (или непересекающиеся окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

6. **Поризм Штейнера.**

   Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2. Пусть окружность σ касается их обеих.

   Определим цепочку окружностей σ_k $(k = 0, 1, 2, ...)$: $\sigma_0 = \sigma$, для всякого $k \geq 1$ окружность σ_k (отличная от σ_{k-2} при $k \geq 2$) касается ω_1, ω_2 и σ_{k-1}.

   Назовем σ *хорошей порядка* n, если для некоторого натурального n (зависящего от σ) окружность σ_n совпала с исходной окружностью σ.

   Докажите, что если есть хотя бы одна хорошая окружность порядка n, то любая окружность, касающаяся ω_1 и ω_2, хорошая порядка n.

7. Циркулем и линейкой постройте образ данной точки при инверсии относительно данной окружности.

8. **Задача Аполлония.**

   Постройте циркулем и линейкой окружность, прямую или точку, имеющую ровно одну общую точку с каждой из трёх данных окружностей, прямых или точек. (Разберите все возможные случаи.)