

Делимость комплексных чисел

! Кольцо $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}$ называется *кольцом гауссовых чисел*. Те его элементы, которые нельзя представить в виде произведения двух необратимых, называются *простыми*.

! Число $z \in \mathbb{Z}[i]$ делится на число $w \in \mathbb{Z}[i]$, если существует $t \in \mathbb{Z}[i]$ такое, что $z = wt$. Запись стандартная: $z:w$ (либо $w|z$).

1. Опишите все пары чисел z, w такие, что одновременно $z|w$ и $w|z$.

2. Докажите, что если $|z|^2 \in \mathbb{P}$, то z – простой элемент $\mathbb{Z}[i]$.

? Какие из чисел $1 + i, 2, 2 \pm i, 3, 3 \pm i, 3 \pm 2i, 4 \pm i, 4 \pm 3i, 5, 5 \pm i, 5 \pm 2i, 6 \pm i, 5 \pm 4i, 7$ являются простыми в $\mathbb{Z}[i]$?

3. **Деление с остатком.**

Докажите, что для любых $n, m \in \mathbb{Z}[i]$ ($w \neq 0$) найдутся $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $n = wm + r$ и $|r| < |w|$.

4. Найдите $(4 + 19i, -6 + 17i)$ в $\mathbb{Z}[i]$. Представьте числа $4 + 19i$ и $-6 + 17i$ в виде произведения простых.

5. **Линейное представление НОДа.**

Докажите, что для любых $n, m \in \mathbb{Z}[i]$ найдутся $s, t \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $sn + tm = (n, m)$.

6. **Единственность разложения.**

Докажите, что любой $w \in \mathbb{Z}[i]$ единственным (с точностью до умножения на обратимые) представляется в виде произведения простых элементов.

7. Решите в целых числах $\mathbb{Z}$ уравнение $x^3 - y^2 = 4$.

8. Докажите, что простое $q \equiv_4 3$ является простым и в $\mathbb{Z}[i]$.

!! **Теорема Ферма-Эйлера.**

Простое $p \equiv_4 1$ можно представить в виде суммы двух квадратов. В связи с этим в $\mathbb{Z}[i]$ такое p не является простым.

Делимость комплексных чисел

! Кольцо $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}$ называется *кольцом гауссовых чисел*. Те его элементы, которые нельзя представить в виде произведения двух необратимых, называются *простыми*.

! Число $z \in \mathbb{Z}[i]$ делится на число $w \in \mathbb{Z}[i]$, если существует $t \in \mathbb{Z}[i]$ такое, что $z = wt$. Запись стандартная: $z:w$ (либо $w|z$).

1. Опишите все пары чисел z, w такие, что одновременно $z|w$ и $w|z$.

2. Докажите, что если $|z|^2 \in \mathbb{P}$, то z – простой элемент $\mathbb{Z}[i]$.

? Какие из чисел $1 + i, 2, 2 \pm i, 3, 3 \pm i, 3 \pm 2i, 4 \pm i, 4 \pm 3i, 5, 5 \pm i, 5 \pm 2i, 6 \pm i, 5 \pm 4i, 7$ являются простыми в $\mathbb{Z}[i]$?

3. **Деление с остатком.**

Докажите, что для любых $n, m \in \mathbb{Z}[i]$ ($w \neq 0$) найдутся $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $n = wm + r$ и $|r| < |w|$.

4. Найдите $(4 + 19i, -6 + 17i)$ в $\mathbb{Z}[i]$. Представьте числа $4 + 19i$ и $-6 + 17i$ в виде произведения простых.

5. **Линейное представление НОДа.**

Докажите, что для любых $n, m \in \mathbb{Z}[i]$ найдутся $s, t \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $sn + tm = (n, m)$.

6. **Единственность разложения.**

Докажите, что любой $w \in \mathbb{Z}[i]$ единственным (с точностью до умножения на обратимые) представляется в виде произведения простых элементов.

7. Решите в целых числах $\mathbb{Z}$ уравнение $x^3 - y^2 = 4$.

8. Докажите, что простое $q \equiv_4 3$ является простым и в $\mathbb{Z}[i]$.

!! **Теорема Ферма-Эйлера.**

Простое $p \equiv_4 1$ можно представить в виде суммы двух квадратов. В связи с этим в $\mathbb{Z}[i]$ такое p не является простым.