

Геометрия комплексных чисел

1. Решите уравнение $|z - 1| + |z - i| = \sqrt{2}$.
2. Пусть $|x| = |y| = |z|$. Докажите, что

$$\frac{xyz}{((x + y)(y + z)(z + x))} \in \mathbb{R}.$$

3. На сторонах треугольника ABC построены квадраты ABB_1A_1 и ACC_1A_2 , перекрывающиеся с этим треугольником. Найдите угол между медианой AM треугольника ABC и отрезком A_1A_2 , а также отношение их длин.
4. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \in \mathbb{R}.$$

5. Треугольники $\triangle ABC$, $\triangle AB_A C_A$, $\triangle A_C B_C C$, $\triangle A_B B_C B$ одинаково ориентированы и подобны при указанном порядке обхода вершин. Докажите, что середины отрезков $A_B A_C$, $C_A C_B$, $B_C B_A$ образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$.
6. На плоскости даны окружности γ и ω . Докажите, что композиция инверсий $\psi_\gamma \circ \psi_\omega \circ \psi_\gamma$ является инверсией. Дополнительный вопрос: относительно какой окружности?
7. Найдите внутри равностороннего треугольника ABC геометрическое место точек X , таких что $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ$.
8. На единичной окружности отмечены n точек, являющиеся вершинами правильного n -угольника. Одна из них соединена хордами с остальными. Найдите произведение длин этих хорд.

Геометрия комплексных чисел

1. Решите уравнение $|z - 1| + |z - i| = \sqrt{2}$.
2. Пусть $|x| = |y| = |z|$. Докажите, что

$$\frac{xyz}{((x + y)(y + z)(z + x))} \in \mathbb{R}.$$

3. На сторонах треугольника ABC построены квадраты ABB_1A_1 и ACC_1A_2 , перекрывающиеся с этим треугольником. Найдите угол между медианой AM треугольника ABC и отрезком A_1A_2 , а также отношение их длин.
4. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \in \mathbb{R}.$$

5. Треугольники $\triangle ABC$, $\triangle AB_A C_A$, $\triangle A_C B_C C$, $\triangle A_B B_C B$ одинаково ориентированы и подобны при указанном порядке обхода вершин. Докажите, что середины отрезков $A_B A_C$, $C_A C_B$, $B_C B_A$ образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$.
6. На плоскости даны окружности γ и ω . Докажите, что композиция инверсий $\psi_\gamma \circ \psi_\omega \circ \psi_\gamma$ является инверсией. Дополнительный вопрос: относительно какой окружности?
7. Найдите внутри равностороннего треугольника ABC геометрическое место точек X , таких что $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ$.
8. На единичной окружности отмечены n точек, являющиеся вершинами правильного n -угольника. Одна из них соединена хордами с остальными. Найдите произведение длин этих хорд.