Advanced Combinatorics

Одноцветные симплексы на рациональной решётке

Шарич Владимир Златкович

ФИВТ МФТИ

MathSchool.ru 2017

Мотивировка

Теорема ван дер Вардена

Найдётся такое число $\mathrm{vdW}_h(N) \in \mathbb{N}$, что из любой арифметической прогрессии длины $\mathrm{vdW}_h(N)$, покрашенной в h цветов, можно выбрать одноцветную подпрогрессию длины N.

Общая теорема ван дер Вардена

Пусть на n-мерной целочисленной решётке дана фигура $\mathcal{M}$; найдётся число $\mathrm{vdW}_h(\mathcal{M}) \in \mathbb{N}$, такое что при любой раскраске n-мерного куба

$$\underbrace{\mathrm{vdW}_h(\mathcal{M}) \times \mathrm{vdW}_h(\mathcal{M}) \times \ldots \times \mathrm{vdW}_h(\mathcal{M})}_{n}$$

в h цветов в этом кубе найдется одноцветная фигура $\mathcal{M}'$, получающаяся из фигуры $\mathcal{M}$ композицией гомотетии с натуральным коэффициентом и сдвига на вектор с натуральными координатами.

Действие – 1

$$G_1 = \{\mathcal{H}_P^k, P \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{Q}, k > 0\} \cup \{T_{\overrightarrow{v}}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{Q}^n\}.$$

$$G_1 : 2^{\mathbb{Q}^n}$$

Действие – 2

$$\mathcal{U}^k_{(x_0,y_0)}: (x,y) \mapsto \left(x_0 + k(x - x_0), y_0 + \frac{y - y_0}{k}\right),$$
$$x_0, y_0 \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{Q}, k > 0$$

$$G_2 = \{\mathcal{U}^k_P, P \in \mathbb{Q}^2, k \in \mathbb{Q}, k > 0\} \cup \{T_{\vec{v}}, \vec{v} \in \mathbb{Q}^2\}.$$

$$G_2 : 2^{\mathbb{Q}^2}$$

Действие – 3

$$\mathcal{U}^{k_x,k_y,\ldots,k_z}_{(x_0,y_0,\ldots,z_0)}: \begin{array}{c}(x,y,\ldots,z)\\ \downarrow \\ (x_0+k_x(x-x_0), y_0+k_y(y-y_0), \ldots, z_0+k_z(z-z_0))\end{array}$$

$$G_3 = \left\{ \mathcal{U}^{k_x,k_y,\ldots,k_z}_{P}, \begin{array}{c} P \in \mathbb{Q}^n, \\ k_x, k_y, \ldots, k_z \in \mathbb{Q}, \\ k_x, k_y, \ldots, k_z > 0, \\ k_x \cdot k_y \cdot \ldots \cdot k_z = 1 \end{array} \right\} \cup \{ T_{\vec{v}}, \vec{v} \in \mathbb{Q}^n \}$$

$$G_3 : 2^{\mathbb{Q}^n}$$

Стандартный симплекс

Симплекс вида

$$\begin{gathered}(x_0, y_0, \dots, z_0),\\ (x_0 + a, y_0, \dots, z_0),\\ (x_0, y_0 + b, \dots, z_0),\\ \dots,\\ (x_0, y_0, \dots, z_0 + c),\end{gathered}$$

где $x_0, y_0, \dots, z_0, a, b, \dots, c \in \mathbb{Q}$, $a, b, \dots, c > 0$.

Благодарности

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Я. Канель-Белов (за постановку задачи и ценные обсуждения).

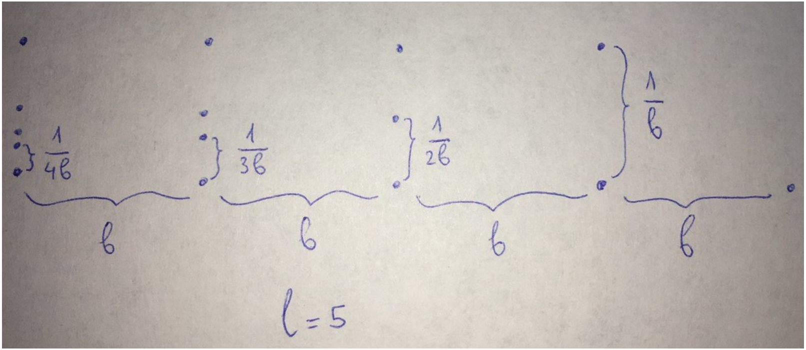
Руководитель магистратуры: профессор, д.ф.-м.н. А.М. Райгородский (за настойчивое приглашение поступить).

Двумерный случай

Аперитив

При любой раскраске $\mathbb{Q}^2$ в конечное число цветов найдётся одноцветный стандартный треугольник заданной положительной рациональной площади.

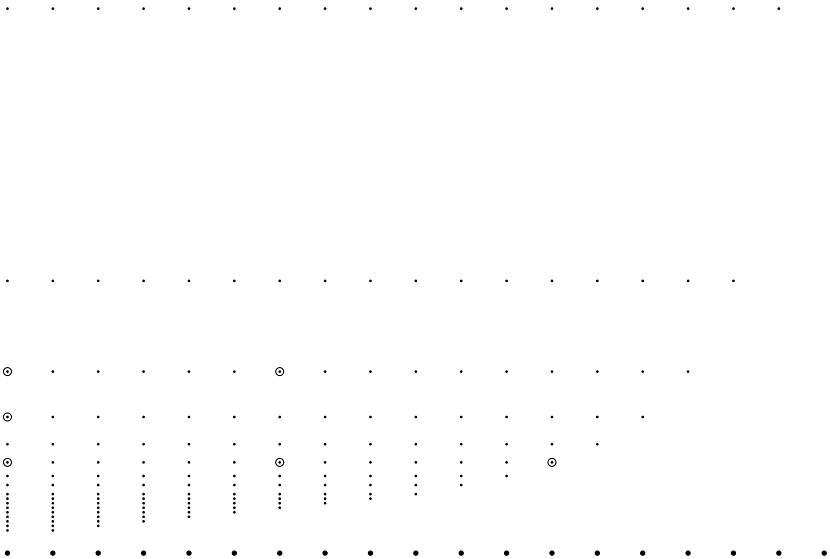
Косой дождь



Вложенность косых дождей

Для любого ℓ в слоях косого дождя длины $L = f(\ell)$ содержится косой дождь длины ℓ.

Кстати, $f(t) = t!t + 1$.



косой дождь длины 19, в слоях которого косой дождь длины 3

Достаточно большие косые дожди

$f(t) = t!t + 1.$

$\mathrm{SR}(h)$:

$$\mathrm{SR}(1) = 2,$$

$$\mathrm{SR}(h) = \mathrm{vdW}_h(f(\mathrm{SR}(h-1))) \quad (h \geq 3).$$

Где искать треугольник

Если все точки косого дождя длины $\mathrm{SR}(h)$ покрашены в h цветов, то в этом косом дожде содержится одноцветный стандартный треугольник площади $1/2$.

Многомерный случай

Главное блюдо с гарниром

При любой раскраске $\mathbb{Q}^n$ в конечное число цветов найдется бесконечно много одноцветных стандартных симплексов одинакового цвета и заданного положительного рационального объема.

Многомерный косой дождь

n-мерный косой дождь длины $\ell \in \mathbb{N}$ с шагом $(s_y, \ldots, s_z) \in \mathbb{Q}^{n-1}$ и началом в $(x_0, y_0, \ldots, z_0) \in \mathbb{Q}^n$:

- *основание:*

$$(x_0, y_0, \ldots, z_0) + \{0\} \times \{0, s_y, 2s_y, \ldots, (\ell-1)s_y\} \times \ldots \times \{0, s_z, 2s_z, \ldots, (\ell-1)s_z\};$$

- *слои:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(x_0 + \dfrac{1}{w \cdot s_y \cdot \ldots \cdot s_z}, y_0 + \kappa_y s_y, \ldots, z_0 + \kappa_z s_z\right), \\ \\ w \in \{1, 2, \ldots, (\ell-1)^{n-1}\}, \\ 0 \le \kappa_y, \ldots, \kappa_z \le \ell - 1, \\ (\ell - 1 - \kappa_y) \cdot \ldots \cdot (\ell - 1 - \kappa_z) \ge w \end{array} \right\}.$$

Вложенность косых дождей

Всякий n-мерный косой дождь длины $L = F_n(\ell)$ содержит в своих слоях n-мерный косой дождь длины ℓ.

Кстати, $F_n(t) = ((t-1)^{n-1}+1)! \cdot t + 1$.

Достаточно большие косые дожди

$F_n(t) = ((t-1)^{n-1}+1)! \cdot t + 1.$

$\mathcal{M}_d(\ell) = \{0, 1, \dots, \ell - 1\}^d$

$\mathrm{SR}_n(h)$:

$$\mathrm{SR}_n(1) = 2,$$

$$\mathrm{SR}_n(h) = \mathrm{vdW}_h(\mathcal{M}_{n-1}(F_n(\mathrm{SR}_n(h-1)))) \quad (h \geq 2).$$

Где искать симплекс

В любом n-мерном косом дожде со стороной $SR_n(h)$, покрашенном в h цветов, существует одноцветный стандартный симплекс объема $1/n$.

Перспективы

$$(x_0 + \varepsilon_x a, y_0 + \varepsilon_y b, \ldots, z_0 + \varepsilon_z c),$$
$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \varepsilon_z \in \{0, 1\}, a \cdot b \cdot \ldots \cdot c = V$$

$$G_4 = \left\{ \mathcal{U}_P^{k^{n-1}, \underbrace{\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}_{n-1}}, k \in \mathbb{Q}, k > 0 \right\} \cup \{ T_{\overrightarrow{v}}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{Q}^n \}$$

Спасибо за внимание!

Шарич В.З.

sharich@mathschool.ru