

МАТЕМАТИКА

Критерии правильности математических рассуждений

Шарич Владимир Златкович



СИРИУС 2017

Шарич Владимир Златкович

'95—'00 участник и призёр олимпиад по математике

'00—'05 студент мехмата МГУ, специалитет

'03—'16 молод и полон энергии

- ▶ преподаватель в специализированных классах (Л2Ш, СУНЦ МГУ, ТЛ«2x2», ЦДО, МГ, ФЛ)
- ▶ преподаватель на сезонных школах (Киров, Кострома, Москва, Камчатка, Казахстан, Сербия, Беларусь, Корея)
- ▶ член жюри турниров и олимпиад (УТЮМ, КОЛМ, ФЕСТ, ЮМТ, ВМО, ММО, ТГ)
- ▶ руководитель методкомиссии Математического многоборья

'15—'17 студент МФТИ, магистратура «Advanced Combinatorics»

'16—.... зав кафедрой математики онлайн-школы «Фоксфорд»

'17—.... сотрудник программы «Математическое образование»



Фоксфорд



Высшая школа экономики

Национальный исследовательский университет



**Математическая
школа**

Шарич В.З., mathschool.ru/sharich



**Центр
Педагогического
Мастерства**



О чём говорить на занятии,
где присутствуют дети 5, 6, 7, 8, 9, 10 классов?

О чём говорить на занятии,
где присутствуют дети 5, 6, 7, 8, 9, 10 классов?

$A \implies B$ или $B \implies A$?

A , если B

A , только если B

A тогда, когда B

A только тогда, когда B

A необходимо для B

A достаточно для B

A — признак B

A — свойство B

Правильно = Убедительно

Маша заметила, что

$$1 + 3 + 5 = 3^2,$$

откуда сделала вывод, что

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Права ли Маша?

Маша заметила, что

$$1 = 1^2,$$

$$1 + 3 = 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2,$$

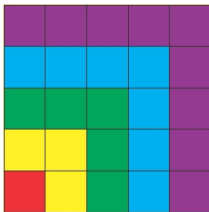
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2,$$

откуда сделала вывод, что

$$1 + 2 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Права ли Маша?

Маша увидела картинку:



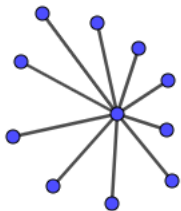
откуда сделала вывод, что

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

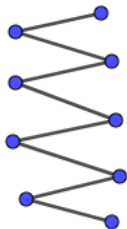
Права ли Маша?

Если рассуждение обобщается
без привлечения новых идей,
то оно считается убедительным
для общего случая.

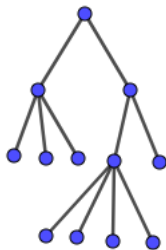
Связный граф без циклов называют *деревом*.
Примеры деревьев:



11 вершин
10 рёбер



9 вершин
8 рёбер



12 вершин
11 рёбер

Пете и Васе кажется, что в любом дереве рёбер на одно меньше, чем вершин.

Петя рассуждает так: **Вася рассуждает так:**

Возьмём граф из одной вершины и без рёбер. Для него утверждение выполняется. Далее будем добавлять по одной новой вершине и соединять её ребром с одной из старых. Таким образом, вершин всегда будет на 1 больше, чем рёбер.

Заметим, что в любом дереве есть вершина, соединённая только с одной другой вершиной. Удалим эту вершину вместе с ребром. Будем повторять эту операцию, пока не останется одна вершина без рёбер. Поскольку число вершин и число рёбер изменились одинаково, исходно вершин было на 1 больше, чем рёбер.

Кто из них рассуждает убедительнее?

Убедительным будет то рассуждение,
которое начинается с рассмотрения
интересующего нас объекта,
в отличие от того рассуждения,
которое обещает в будущем построить
интересующий нас объект.

Коля захотел доказать, что если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ отрицателен, то уравнение не имеет решений.

Коля знает формулу для корней:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Коля рассуждает так: в формуле стоит \sqrt{D} ; но если D отрицательно, из него нельзя извлекать корень. Следовательно, уравнение не имеет решений.

Убедителен ли Коля?

Лена, глядя на Колю, тоже захотела доказать, что если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ отрицателен, то уравнение не имеет решений.

Лена знает, что если x_1, x_2 – корни квадратного трёхчлена, то

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{D}{a^2}.$$

Отсюда Лена делает вывод, что если были бы корни, то D было бы неотрицательно.

Следовательно, уравнение не имеет решений.

Убедительна ли Лена?

Прежде чем пользоваться чем-либо,
необходимо убедиться в применимости
этого инструмента.
Только так можно быть убедительным.

Ира пыталась доказать, что сумма углов треугольника равна 180° . Она нашла в справочнике формулу для суммы углов n -угольника:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Доказывать эту формулу Ира, конечно, не умела, но это не помешало ей сослаться на формулу и записать, что при $n = 3$ получается $(3 - 2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$.

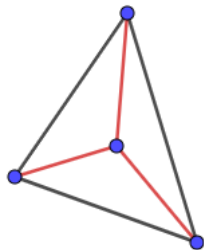
Убедительно ли доказательство Иры?

Паша остался недоволен рассуждением Иры и решил придумать своё. Он отметил в треугольнике точку и соединил её с вершинами. Далее Паша обозначил за S сумму углов треугольника и записал уравнение:

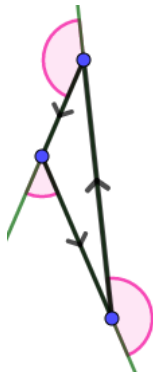
$$S + S + S = S + 360^\circ.$$

Отсюда Паша вывел, что $S = 180^\circ$.

Убедительно ли доказательство Паши?



Пока Ира и Паша размышляли над доказательством, муравей Дима полз по сторонам треугольника. Повернув по разу в каждой вершине, он оказался на исходной стороне и двигался в исходном направлении. Дима рассуждал: «Если углы треугольника α, β, γ , то



$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 360^\circ$$

(ведь я сделал ровно один поворот вокруг себя).
Следовательно, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.»

Убедительно ли доказательство Димы?

101 способ не доказать утверждение:

1) сослаться на следствие
из доказываемого утверждения;

2) незаметно сослаться
на недоказанное утверждение;

...

Федя узнал, что функции бывают чётные и нечётные, и тут же отметил, что любая функция $f(x)$ представляется в виде суммы чётной и нечётной: достаточно взять формулу для $f(x)$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

и все слагаемые вида ax^{2k} отнести к чётной функции, а все слагаемые вида ax^{2k-1} — к нечётной функции.

Убедительно ли доказательство Федеи?

Аня несколько иначе подошла к тому же вопросу. Она записала $f(x) = f_ч(x) + f_н(x)$, где $f_ч$ – чётная функция, а $f_н$ – нечётная. Затем подставила $(-x)$ на место x и воспользовалась свойствами функций: $f(-x) = f_ч(x) - f_н(x)$. Следовательно,

$$f_ч(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_н(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Функции найдены.

Убедительно ли доказательство Ани?

Аня несколько иначе подошла к тому же вопросу. Она записала $f(x) = f_ч(x) + f_н(x)$, где $f_ч$ – чётная функция, а $f_н$ – нечётная. Затем подставила $(-x)$ на место x и воспользовалась свойствами функций: $f(-x) = f_ч(x) - f_н(x)$. Следовательно,

$$f_ч(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_н(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Функции найдены.

Убедительно ли доказательство Ани?

Что на самом деле Аня доказала?

Умение сделать вид
не всегда вредно.
Но с ним нужно уметь обращаться.

как бы **Литература**

«Математический аквариум»

(Уфнаровский В.А.)

«Как решают нестандартные задачи»

(Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К.)

«Математика – это просто 2.0»

(Мэйсон Дж., Бёртон Л., Стэйси К.)

Удачных занятий математикой!

Шарич В.З.
sharich@mathschool.ru



Фоксфорд



Высшая школа экономики

Национальный исследовательский университет



Математическая
школа



Центр
Педагогического
Мастерства