Сведение

1. 1001 астрономов, каждый на своей планете, наблюдают друг за другом, причем каждый наблюдает за ближайшим к нему (среди расстояний между планетами нет одинаковых). Докажите, что хотя бы за одним астрономом никто не наблюдает.
2. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
3. У фермера есть 101 корова, вес каждой коровы равен целому числу килограммов. Известно, что любые 100 из данных коров можно разбить на 2 части по 50 коров так, чтобы суммарный вес коров в обеих частях был одинаковым. Докажите, что все коровы – одного веса.
4. На плоскости даны N синих и N красных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести N непересекающихся отрезков, каждый из которых соединял бы красную точку с синей.
5. **“Ханойская башня”.** Имеется пирамида из n колец, надетых на стержень, и два пустых стержня той же высоты. Диаметры колец строго убывают от основания пирамиды к ее вершине. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Требуется переложить все кольца с одного стержня на другой. Можно ли это сделать и какое наименьшее число ходов потребуется?
6. На какое максимальное число частей можно разрезать круглый блин при помощи n линейных разрезов? Решите аналогичную задачу для плоских разрезов шарообразной головки сыра.
7. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого $n \geq 6$.
8. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$ число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n.
9. Известно, что $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $a^n + \dfrac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.
10. Дан квадрат 100×100. Каждая его клетка покрашена в один из четырех цветов, причем любой квадратик 2×2 содержит все четыре цвета. Докажите, что угловые клетки квадрата 100×100 разноцветны.
11. Докажите, что $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 2$.

Сведение

1. 1001 астрономов, каждый на своей планете, наблюдают друг за другом, причем каждый наблюдает за ближайшим к нему (среди расстояний между планетами нет одинаковых). Докажите, что хотя бы за одним астрономом никто не наблюдает.
2. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
3. У фермера есть 101 корова, вес каждой коровы равен целому числу килограммов. Известно, что любые 100 из данных коров можно разбить на 2 части по 50 коров так, чтобы суммарный вес коров в обеих частях был одинаковым. Докажите, что все коровы – одного веса.
4. На плоскости даны N синих и N красных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести N непересекающихся отрезков, каждый из которых соединял бы красную точку с синей.
5. **“Ханойская башня”.** Имеется пирамида из n колец, надетых на стержень, и два пустых стержня той же высоты. Диаметры колец строго убывают от основания пирамиды к ее вершине. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Требуется переложить все кольца с одного стержня на другой. Можно ли это сделать и какое наименьшее число ходов потребуется?
6. На какое максимальное число частей можно разрезать круглый блин при помощи n линейных разрезов? Решите аналогичную задачу для плоских разрезов шарообразной головки сыра.
7. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого $n \geq 6$.
8. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$ число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n.
9. Известно, что $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $a^n + \dfrac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.
10. Дан квадрат 100×100. Каждая его клетка покрашена в один из четырех цветов, причем любой квадратик 2×2 содержит все четыре цвета. Докажите, что угловые клетки квадрата 100×100 разноцветны.
11. Докажите, что $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 2$.