

## Геометрия треугольника

1. В треугольнике  $ABC$  с отношением сторон  $AB : AC = 5 : 4$  биссектриса угла  $BAC$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $L$ . Найдите длину отрезка  $AL$ , если длина вектора  $4 \cdot \vec{AB} + 5 \cdot \vec{AC}$  равна 2016.
2. На плоскости задана точка  $P$ . Рассматриваются различные равносторонние треугольники  $ABC$ , такие, что  $PA = 2$ ,  $PB = 3$ . Какое максимальное значение может принимать длина отрезка  $PC$ .
3. Длина медианы  $AD$  треугольника  $ABC$  равна 3, длины сторон  $AB$  и  $AC$  – 5 и 7 соответственно. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
4. В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.
5. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 1, а длины высот выражаются натуральными числами. Найдите стороны треугольника.

## Геометрия окружности

6. Окружности с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются внешним образом в точках  $A$  и  $B$  (то есть точки  $O_1$  и  $O_2$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ ). Известно, что  $\angle AO_1B = \alpha$ ,  $\angle AO_2B = \beta$ ,  $O_1O_2 = a$ . Найдите радиусы окружностей.
7. Окружность касается одной из сторон угла с вершиной  $A$  в точке  $B$  и пересекает вторую сторону в точках  $C$  и  $D$ , причем  $AD$  в три раза меньше  $AC$ . Косинус угла  $A$  равен  $\sqrt{3}/4$ .
  - а) Найдите отношение  $BC : BD$ .
  - б) Найдите отношение радиуса окружности к  $BD$ .
8. Пусть  $OP$  – диаметр окружности  $\Omega$ ,  $\omega$  – окружность с центром в точке  $P$  и радиусом меньше, чем у  $\Omega$ . Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  пересекаются в точках  $C$  и  $D$ . Хорда  $OB$  окружности  $\Omega$  пересекает вторую окружность в точке  $A$ . Найдите длину отрезка  $AB$ , если  $BD \cdot BC = 5$ .
9. Окружность проходит через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$  и сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите радиус окружности, если  $AC = 6$ ,  $\angle AEC = 5\angle BAF$ ,  $\angle ABC = 72^\circ$ .

## Геометрия треугольника

1. В треугольнике  $ABC$  с отношением сторон  $AB : AC = 5 : 4$  биссектриса угла  $BAC$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $L$ . Найдите длину отрезка  $AL$ , если длина вектора  $4 \cdot \vec{AB} + 5 \cdot \vec{AC}$  равна 2016.
2. На плоскости задана точка  $P$ . Рассматриваются различные равносторонние треугольники  $ABC$ , такие, что  $PA = 2$ ,  $PB = 3$ . Какое максимальное значение может принимать длина отрезка  $PC$ .
3. Длина медианы  $AD$  треугольника  $ABC$  равна 3, длины сторон  $AB$  и  $AC$  – 5 и 7 соответственно. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
4. В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.
5. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 1, а длины высот выражаются натуральными числами. Найдите стороны треугольника.

## Геометрия окружности

6. Окружности с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются внешним образом в точках  $A$  и  $B$  (то есть точки  $O_1$  и  $O_2$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ ). Известно, что  $\angle AO_1B = \alpha$ ,  $\angle AO_2B = \beta$ ,  $O_1O_2 = a$ . Найдите радиусы окружностей.
7. Окружность касается одной из сторон угла с вершиной  $A$  в точке  $B$  и пересекает вторую сторону в точках  $C$  и  $D$ , причем  $AD$  в три раза меньше  $AC$ . Косинус угла  $A$  равен  $\sqrt{3}/4$ .
  - а) Найдите отношение  $BC : BD$ .
  - б) Найдите отношение радиуса окружности к  $BD$ .
8. Пусть  $OP$  – диаметр окружности  $\Omega$ ,  $\omega$  – окружность с центром в точке  $P$  и радиусом меньше, чем у  $\Omega$ . Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  пересекаются в точках  $C$  и  $D$ . Хорда  $OB$  окружности  $\Omega$  пересекает вторую окружность в точке  $A$ . Найдите длину отрезка  $AB$ , если  $BD \cdot BC = 5$ .
9. Окружность проходит через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$  и сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите радиус окружности, если  $AC = 6$ ,  $\angle AEC = 5\angle BAF$ ,  $\angle ABC = 72^\circ$ .