

Рациональные уравнения, неравенства и системы

1. Сравните число

$$\sqrt{|8\sqrt{3} - 16|} - \sqrt{|8\sqrt{3} + 16|}$$

и наименьший корень уравнения $4x^2 + 21x + 17 = 0$

2. Решите уравнение

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)^2.$$

3. Можно ли представить выражение

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + bz)^2 - (by - cx)^2 - (cz + ay)^2$$

в виде квадрата некоторого многочлена от переменных a, b, c, x, y, z ?

4. Гипербола $y = 5/x$ пересекается с прямой $2x + y = 12$ в точках A и B , а с прямой $x + 2y = 8$ — в точках C и D . Найдите координаты точки, равноудалённой от точек A, B и C .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$$

6. Найдите все решения уравнения

$$(y(x - 1))^2 + (x - 1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x - 1| = 0.$$

7. Решите неравенство $(x^2 - 2x - 1)^2 - 2(x^2 - 2x - 1) > x + 1$.

8. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

9. Решите систему
$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

10. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

(а) $x + y$

(б) $x^2 + 2y^2$

при условии $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Иррациональные уравнения, неравенства и системы

11. Решите уравнение

$$[x + 1/2] = x^6 - [x].$$

12. Решите уравнение

$$1/2 - x^2 = \sqrt{1/2 - x}.$$

13. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}}} \geq 1.$$

14. Решите уравнение

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}.$$

15. Найдите наименьшую величину выражения

$$\sqrt{x_1^2 + (1 - x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + (1 - x_1)^2}.$$

16. Докажите, что для любых натуральных m и n хотя бы одно из чисел $\sqrt[m]{n}$, $\sqrt[n]{m}$ не больше $\sqrt[3]{3}$.

17. Решите уравнение

$$(2x + 1)(1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 8}) + x(1 + \sqrt{x^2 + 7}) = 0.$$

18. Решите уравнение

$$\sqrt[4]{x - \frac{3}{2}} + \sqrt[4]{10 - x} = 3.$$

19. При каждом $a, b > 0$ решите неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{b}.$$