

Линейные задачи с параметрами

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди решений уравнения

$$(a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013)x = a^3 + 3a^2 - 6a - 8$$

есть неотрицательные числа.

2. Для любого натурального n и для любого набора чисел x_1, x_2, \dots, x_n из отрезка $[0; 3]$ уравнение

$$\sum_{i=1}^n |x - x_i| = an$$

имеет решение x , принадлежащее отрезку $[0; 3]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию:

- (a) $a = 0$;
(b) $a = 3/2$;
(c) $a = 2$.
3. Найдите все a , при которых для любого b уравнение

$$|x - 2| + b|2x + 1| = a$$

имеет хотя бы один корень.

4. Найдите все a , при каждом из которых для любого b система

$$x - by + az^2 = 0, \quad 2bx + (b - 6)y - 8z = 8$$

имеет хотя бы одно решение.

5. Найдите все a , при которых неравенство

$$2ax + 2\sqrt{2x + 3} - 2x + 3a - 5 < 0$$

выполняется для всех $x \in [-1; 3]$.

Квадратичные задачи с параметрами

6. При каждом значении a решите уравнение

$$|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + |x - 3| + |x + 3| + \dots + |x - 2015| + |x + 2015| + 2x^2 + 2a^2 + 4030^2 - 8060x - 8060a = 4030x.$$

7. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (2 + a)x - 6a^2 + 11a = 3$$

имеет два корня x_1 и x_2 , удовлетворяющие неравенству $\frac{2x_1}{x_2} + \frac{x_2}{2x_1} \leq 2$.

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$$

имеет единственное решение?

9. Найдите все значения a , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2 - 5ax + 4a$ равна 3.

10. Найдите все пары (a, b) , при которых уравнение

$$(3x^2 - 2a^2 + ab)^2 + (3a^2 - ab + 2b^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$$

имеет хотя бы один корень.

11. Решите уравнение

$$\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + x}}} = x.$$

12. Найдите все пары a, b , при которых система

$$x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \quad x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0$$

имеет не менее 5 различных решений.

13. Найдите все a , при которых система

$$a(x - 4) = 3(y + 2), y + \sqrt{x} = 0$$

имеет ровно 2 различных решения.

14. Найдите все a , при которых система

$$x^3 - (a + 3)x^2 + (3a + 2)x - 2a \geq 0, \quad x^3 - (a + 3)x^2 + 3ax \leq 0$$

имеет единственное решение.

15. Найдите все x , при которых уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

(относительно z) имеет действительное решение при любом y .