Процессы

1. Последовательность a_n задана соотношением $a_{n+2} = a_{n+1}/a_n$ и двумя первыми членами $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Найдите a_{1001}.

2. В городе X имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному человеку. В один прекрасный день каждый переезжает из своего дома в какой-то другой. После переезда в каждом доме по прежнему живет ровно один жилец. Докажите, что можно так раскрасить все коттеджи в три цвета, чтобы у каждого хозяина цвет нового дома отличался от цвета старого.

3. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из собранного состояния. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту комбинацию еще несколько раз.

4. Докажите, что в последовательности Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, ... существует число, делящееся на 1001.

5. Государство Элмышатия всегда существовало и всегда будет существовать. Каждый день в этом государстве либо идёт дождь, либо бушует буря, либо светит солнце. Известно, что погода в данный день однозначно определяется погодой за предшествующую четырёхдневку. Всю последнюю четырёхдневку шёл дождь. Докажите, что и до и после этого дождливых четырёхдневок было бесконечно много.

6. По окружности расставлены в произвольном порядке 4 единицы и 5 нулей. В промежутках между одинаковыми числами пишется 0, а между разными 1, после чего все первоначальные числа стираются. Можно ли получить набор из всех нулей?

7. На доске написаны числа от 1 до 20. Можно пару чисел x, y заменить на $xy + x + y$. Какое число останется в конце?

8. На плоскости лежат три шайбы. Хоккеист бьет по одной из них так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке. Можно ли все шайбы вернуть на свои места после 2005 ударов?

9. Пусть A — число, записанное с помощью 3^{2009} девяток. Обозначим $A_1 = S(A)$ — сумму цифр числа A, $A_2 = S(A_1)$, $A_3 = S(A_2)$, $\ldots$. Найдите A_4.

10. В одной вершине куба стоит 1, а в остальных – нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

11. Числа от 1 до 19 расположены в порядке возрастания. Разрешается выбрать любые три стоящих подряд числа и переставить их циклически: если вначале было a, b, c, то стало b, c, a. Можно ли расположить числа в порядке убывания?

12. В клетках таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце были неотрицательными.

13. По кругу написано несколько чисел. Если для некоторых идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

14. Дан произвольный набор из $n \geqslant 2$ целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из него получается новый набор: $\frac{a_1+a_2}{2}$, $\frac{a_2+a_3}{2}$, $\ldots$, $\frac{a_{n-1}+a_n}{2}$, $\frac{a_n+a_1}{2}$; из этого набора — следующий по тому же правилу и т. д. Докажите, что если все получающиеся числа целые, то все первоначальные числа равны.

15. На плоскости дано $4n$ точек общего положения. Покажите, что найдётся пара перпендикулярных прямых, делящих плоскость на четыре прямых угла, в каждом из которых лежит по n точек.

16. В 100 ящиков разложены апельсины и яблоки. Покажите, что можно выбрать 51 ящик так, чтобы в них содержалось бы не менее половины всех апельсинов и всех яблок.

17. Из города A в город B ведут две не пересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой некоторой длины, меньшей 2ℓ, смогли проехать из A в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса ℓ, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?