

Сопоставление

1. Докажите, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^k$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^{k+1}$.
2. На каждом из полей верхней и нижней горизонтали доски 7×7 стоит по фишке: внизу – белые, вверху – чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все чёрные фишки стояли внизу, а белые – вверху?
3. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы каждые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?
4. В некоторой стране из каждого города выходит ровно 1000 дорог, причём из любого города можно по дорогам добраться до любого другого. Террористы взорвали одну из дорог. Докажите, что и после этого можно из любого города добраться до любого.
5. В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов – по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.
6. Докажите, что нельзя занумеровать рёбра куба числами $1, 2, \dots, 11, 12$ так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трёх выходящих из неё рёбер была одной и той же.
7. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?
8. Докажите, что
$$\sum_{k=1}^{1000} \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{1000000}{k^2}} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{100} \left\lfloor \sqrt{\frac{1000000}{k^3}} \right\rfloor .$$
9. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов ($m < n$). В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с ней находится больше звёздочек, чем с ней в одном столбце.

Сопоставление

1. Докажите, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^k$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^{k+1}$.
2. На каждом из полей верхней и нижней горизонтали доски 7×7 стоит по фишке: внизу – белые, вверху – чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все чёрные фишки стояли внизу, а белые – вверху?
3. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы каждые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?
4. В некоторой стране из каждого города выходит ровно 1000 дорог, причём из любого города можно по дорогам добраться до любого другого. Террористы взорвали одну из дорог. Докажите, что и после этого можно из любого города добраться до любого.
5. В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов – по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.
6. Докажите, что нельзя занумеровать рёбра куба числами $1, 2, \dots, 11, 12$ так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трёх выходящих из неё рёбер была одной и той же.
7. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?
8. Докажите, что
$$\sum_{k=1}^{1000} \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{1000000}{k^2}} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{100} \left\lfloor \sqrt{\frac{1000000}{k^3}} \right\rfloor .$$
9. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов ($m < n$). В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с ней находится больше звёздочек, чем с ней в одном столбце.