НОД и НОК. Алгоритм Евклида.

1. Конфеты «Сладкая математика» продаются по 12 штук в коробке, а конфеты «Геометрия с орехами» – по 15 штук в коробке.
   Какое наименьшее число коробок конфет того и другого сорта необходимо купить, чтобы тех и других конфет было поровну?

   Наибольший общий делить двух чисел a и b будем обозначать через (a, b), а наименьшее общее кратное – через $[a, b]$.

2. Найдите общие делители чисел n и $n + 1$.

3. Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a, a - b)$ для любых целых a и b.

4. Для любых натуральных a, x, y докажите, что НОК$(ax, ay) = a\cdot$ НОК(x, y).
   Лемма Пусть a и b – натуральные числа (где $b < a$), r – остаток от деления a на b. Тогда наибольший общий делитель чисел a и b равен наибольшему общему делителю чисел b и r, то есть $(a, b) = (b, r)$

5. Найдите $(846, 246)$.

6. Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b верно равенство: $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

7. Верно ли, что являются взаимно простыми: а) два соседних нечётных числа; б) нечётное число и половина чётного, следующего за ним?

8. Найдите с помощью алгоритма Евклида: а) $(1960, 588)$; б) $[1960, 588]$.

9. Доказать, что дробь $\dfrac{12n + 1}{30n + 1}$ несократима.

10. Автомат умеет отрезать от любого прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Найдите какие-нибудь два числа a и b, чтобы при разрезании прямоугольника $a \times b$ получились квадраты шести разных размеров.

11. Числа Фиббоначи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$ определяются равенствами $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$ (следующее число равно сумме двух предыдущих) и $\phi_1 = \phi_2 = 1$. Найдите (ϕ_{100}, ϕ_{101}).