

Признаки делимости

группа «Кайсия»

Определение. Два числа называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.

1. Сформулируйте и докажите признаки делимости на: 2, 3, 4, 5, 9, 25.
2. В числе 65432789 вычеркните наименьшее количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 36.
3. Автомат печатает на полоске бумаги цифры «4» по одной. Удастся ли остановить его так, чтобы было число, кратное 8?
4. Найдите...
 - а) ... натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225;
 - б) ... наименьшее такое число.
5. Верно ли, что, если число n делится на два числа, то оно делится и на их произведение? Проверьте для деления числа n на числа...
 - а) ... 6 и 4,
 - б) ... 3 и 2,
 - в) ... 9 и 4.

6. Швондер придумал ребус, в котором фигурируют числа

ГЛАВРЫБААБЫРВАЛГ и БОРМЕНТАЛЬ.

Профессор Преображенский утверждает, что оба этих числа — составные. Прав ли профессор?

7. Можно ли число 1998 представить как разность квадратов двух натуральных чисел?
8. Вася написал на доске пример умножения двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причем одинаковые цифры — на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось $AB \cdot BC = DDEE$. Докажите, что он где-то ошибся.
9. Вася придумал два признака делимости на 27:
 - если число делится на 3 и на 9, то оно делится на 27;
 - если сумма цифр числа делится на 27, то и само числится на 27.

Где он ошибся?

10. Вася посчитал число $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$ и нашёл его сумму цифр. Получилось новое число, в котором он опять сложил все цифры, и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое?

Остатки

Определение. Если число a можно записать в виде $a = b \cdot q + r$, где $0 \leq r < b$, то говорят, что a даёт при делении на b (неполное) частное q и остаток r .

1. Какой остаток даёт число 123321 при делении на 999?
2. Когда Скупой рыцарь раскладывает свои монеты стопками по 9 штук, у него остаётся восемь монет. Сколько монет у него может остаться, когда он будет раскладывать монеты стопками по 18 штук?
3. Число a кратно 3. Может ли остаток от деления a на 12 быть равным 2?
4. а) Найдите наименьшее число (отличное от единицы), которое даёт остаток 1 при делении на 2, на 3, на 5 и на 7.
б) Найдите все такие числа.
5. Каждое из чисел от 1 до 1000000 заменили на его сумму цифр. Каждое из полученных чисел заменили на его сумму цифр. Так делали, пока не получили миллион однозначных чисел. Каких среди них больше: единиц или двоек?
6. Имеется 100 камней. Два игрока берут по очереди от 1 до 5 камней. Проигрывает тот, кто берет последний камень. Найдите выигрышную стратегию для первого игрока.
7. Разочарованный вкладчик фонда «Нефтьалмазинвест» разорвал акцию на 8 кусков. Не удовлетворившись этим, он разорвал один из кусков еще на 8, и т.д. Могло ли у него получиться 2002 куска?
8. В магазине было 6 ящиков, массы которых соответственно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 килограммов. Две фирмы приобрели пять ящиков, причём одна из них взяла по массе яблок в два раза больше чем другая. Какой ящик остался в магазине?
9. На доске написано число 2. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?