

Простые числа

группа «Бресква»

Определение. Число $p > 1$ называется *простым*, если кроме 1 и p оно не имеет других натуральных делителей. Число называется *составным*, если у него есть делитель больше 1, но меньше самого числа.

1. а) Приведите пример трёх чисел, не делящихся друг на друга и таких, что произведение любых двух из них делится на третье. б) Тот же вопрос для чисел, больших ста.
2. Докажите, что простое число, большее, чем 3, представимо в виде $6n + 1$, либо в виде $6n - 1$, где n - натуральное число или 0.
3. Найдите все простые числа, которые отличаются на 17.
4. Верно ли, что многочлен $P(n) = n^2 + n + 41$ при всех n принимает только простые значения?
5. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?
6. Найдите все простые числа, которые нельзя записать в виде суммы двух составных.
7. Три трёхзначных простых числа, составляющие арифметическую прогрессию, записаны подряд. Может ли полученное девятизначное число быть простым?

Уравнения в целых числах — 1

1. Кузнечик прыгает по числовой прямой. Сначала он делает один или несколько прыжков длины 3 в одну сторону, а затем один или несколько прыжков длины 5 в другую сторону. Как ему попасть из точки 0 в точку 7? Найдите все варианты.
2. Найдите какое-нибудь решение уравнения в целых числах: а) $15x + 17y = 1$;
б) $15x + 17y = 9$.
3. Один мастер делает на длинной ленте пометки синим фломастером от её начала через каждые 34 см, другой мастер делает пометки красным фломастером через каждые 27 см. Может ли какая-либо синяя пометка оказаться на расстоянии 2 см от какой-либо красной?

Основная лемма. Если числа a и b взаимно просты, то найдутся такие числа x_0 и y_0 , что $ax_0 + by_0 = c$.

4. Имеют ли решение следующие диофантовы уравнения:

а) $6x + 8y = 9$;

б) $5x + 10y = 17$;

в) $25x + 10y = 55$;

г) $12x + 15y = 22$;

д) $24x + 18y = 2010$?

5. Докажите теорему:

Теорема: а) Если c делится на (a, b) , то уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечно много решений. б) Если же c не делится на (a, b) , то уравнение $ax + by = c$ не имеет решений.

6. С помощью циркуля и линейки разделить данный угол в 19° на 19 равных частей.

7. (*) 175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев. Докажите, что на трёх шалтаев и одного болтая рубля не хватит. (они стоят целое число копеек).

Уравнение в целых числах — 2

- Найдите все целые решения уравнений:
 - $19x - 5y = -1$;
 - $23x - 17y = 11$;
 - $53x - 47y = 11$;
 - $35x - 18y = 3$;
 - $85x - 71y = 5$;
 - $41x - 11y = 7$.
- Имеются контейнеры двух видов: по 190 кг и по 170 кг. Можно ли полностью загрузить ими грузовик грузоподъёмностью 3 т?
- Ученик решает задание из 20 задач. За верно решённую задачу ему ставят 8 баллов, за неверно решённую – (–5) баллов, за задачу, которую не брался решать – 0 баллов. Сколько задач он брался решать, если в сумме он получил 13 баллов?
- Сколько точек с целочисленными координатами, удовлетворяющими неравенствам $x < 0$ и $y > 0$, лежат на прямой $8x - 13y + 11 = 0$?
- a и b – взаимно простые натуральные числа. Докажите, что уравнение $ax + by = ab$ не имеет решений в натуральных числах.
- У продавца есть 100 - граммовые гири и консервные банки весом по 450 г. Как с их помощью отвесить на чашечных весах 2,5 кг сахара за один раз, используя наименьшее количество гирек и банок в общей сложности?
- Решить в целых числах уравнение: $2x + 3y + 5z = 11$.
- На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика?