Определения

Этот листок содержит все необходимые определения и теоремы для занятий по графам. Если какое-то слово в листке кажется вам незнакомым, его всегда можно найти здесь.

Во всех наших листках мы считаем, что в графах остутствуют петли (рёбра, соединяющие вершину с собой) и кратные рёбра (то есть любые две вершины соединяются не более чем одним ребром).

- **Определение 1.** *Графом* называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются *вершинами* графа, а соединяющие линии — *рёбрами.* (Каждое ребро соединяет ровно две вершины.)
- **Определение 2.** *Степенью* (или порядком) вершины называется количество рёбер, исходящих из этой вершины. Вершина называется *чётной*, если из нее выходит чётное число рёбер, и *нечётной*, если из неё выходит нечётное число рёбер.
- **Теорема 1. (Лемма о рукопожатиях)** Сумма степеней всех вершин графа равняется удвоенному количеству рёбер.

  Следствие. Количество нечётных вершин всегда чётно.
- **Определение 3.** *Путём* в графе от вершины A до вершины B назовём такую последовательность рёбер графа, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Если никакая вершина не встречается более одного раза, то такой путь называется *простым.*
- **Определение 4.** *Циклом* называется путь, у которого начало и конец совпадают. *Простой цикл* — цикл без повторяющихся вершин (за исключением совпадения начала и конца).
- **Определение 5.** Граф называется *полным*, если любая вершина соединяется ребром с любой другой.
- **Определение 6.** Граф называется *связным*, если для любой его вершины найдётся путь, связывающий её с любой другой вершиной графа.
- **Определение 7.** *Компонентой связности* называется наибольший связный подграф.
- **Определение 8.** Два графа называются *одинаковыми* (или, по-научному, *изоморфными*), если в них можно занумеровать вершины таким образом, что между вершинами k и m в первом графе есть ребро, если и только если оно есть между вершинами с этими же номерами в другом графе.

- **Определение 9.** Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы рёбра соединяли только пары вершин разного цвета.
- **Определение 10.** Связный граф без циклов называется *деревом*.
- **Теорема 2. (Лемма о висячей вершине)** В любом дереве найдётся вершина, из которой выходит ровно одно ребро.
- **Теорема 3.** В дереве количество вершин на одну больше количества рёбер.
- **Теорема 4.** Из любого связного графа можно сделать дерево, удалив часть рёбер. (Такое дерево называется *остовным*)
- **Теорема 5.** Из всех графов на данном наборе вершин наименьшее количество рёбер имеют деревья и только они.

Графы

группа «Кайсия»

В этом занятии вам понадобятся определения 1-8 и лемма о рукопожатиях.

1. Нарисуйте все графы на четырех вершинах.
2. Между планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по маршрутам Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс, Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?
3. В графе с...

   а) ... восемью...

   б) ... десятью...

   ... вершинами степень каждой вершины равна 2. Нарисуйте все такие графы. Не забывайте, что графы могут быть несвязными.
4. Переформулируйте задачу 1 из вступительной олимпиады в терминах графов.
5. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?
6. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
7. В Сербии 2018 компьютеров и 1 принтер. К главному компьютеру подсоединён только один провод, к принтеру – 37, а к каждому обычному компьютеру – по 20 проводов. Всегда ли удастся распечатать условия теста с главного компьютера?
8. В связном графе степени двух вершин равны 2, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя убрать одно ребро так, чтобы граф распался на две компоненты связности.

Деревья

`группа «Кайсия»`

1. Дан граф, являющийся деревом. Могут ли в этом графе найтись две вершины, между которыми...

   а) ... нет пути?

   б) ... более одного пути?

   Что произойдет с этим графом, если...

   - ... соединить ребром произвольные вершины A и B, до этого не соединённые ребром?
   - ... убрать ребро, соединяющее две произвольные вершины A и B?

2. Докажите, что в дереве имеется...

   а) ... одна висячая вершина,

   б) ... две висячие вершины.

3. В графе все вершины имеют степень пять. Докажите, что в нём есть цикл.

4. Ильдар нарисовал на доске семь графов, каждый из которых является деревом с шестью вершинами. Докажите, что среди них есть два одинаковых.

5. Какое наибольшее число рёбер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?

6. В некоторой стране 30 городов, причём все соединены между собой дорогами. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города всё равно можно было проехать в любой другой?

7. Между любыми двумя соседними клетками шахматной доски лежит спичка. Какое наименьшее число спичек можно убрать, что бы ладья могла попасть за несколько ходов из любой клетки в любую другую, не перескакивая через спички?

8. В стране из любого города в любой другой, двигаясь по дорогам (возможно, через другие города). Докажите, что можно превратить один из городов в военную базу (закрыв проезд через него) так, что из любого из оставшихся городов по-прежнему можно будет проехать в любой другой.

Двудольные графы

группа «Кайсия»

1. На 8 марта каждый из 10 мальчиков класса подарил по цветку 8 одноклассницам. Известно, что каждая девочка получила по 5 цветков. Сколько всего девочек?
2. Нарисуйте двудольный граф, где черные и белые вершины – это соответственно чёрные и белые клетки доски 3×3, а ребра соответствуют ходу коня.
3. Докажите, что дерево является двудольным графом.
4. Докажите, что в двудольном графе суммы степеней вершин в каждой доле равны.
5. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. 17 из них любят играть в матбой, а в классе 15 двухместных парт. Сколько всего ребят в классе?
6. Каждый из учеников 9А класса дружит с тремя учениками 9Б класса, а каждый ученик 9Б класса дружит с тремя учениками 9А класса. Докажите, что число учеников в этих классах одинаково.
7. Каждый граф можно превратить в двудольный, покрасив все его вершины в белый цвет и добавив чёрную вершину в середину каждого ребра. Сколько вершин каждого цвета и сколько рёбер у полученного графа, если у исходного было V вершин и E рёбер?