

- Белград, 27 июня 2017 г.

7. В треугольнике ABC проведены перпендикуляры BE и CF к биссектрисе ℓ угла BAC (E, F лежат на ℓ). Если $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $AF = 9$ см, то отрезок AE равен:
- (A) 6 см; (B) $4\sqrt{3}$ см; (C) 5 см; (D) $\frac{32}{3}$ см; (E) $3\sqrt{3}$ см.
8. Сколько существует прямоугольных треугольников, у которых длина одного катета равна 21, а длина другого катета и длина гипотенузы — натуральные числа?
- (A) 2; (B) не более 1; (C) не менее 5; (D) 3; (E) 4.

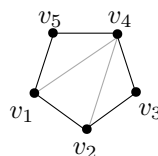
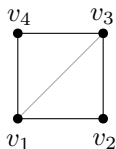
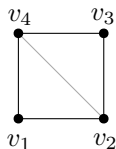
ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Задачи 9-12 — классические задачи, их решения следует подробно обосновать и записать. Полное решение каждой из этих задач стоит 15 баллов.

9. Пусть k — окружность, описанная около треугольника ABC , и пусть D, E и F — середины дуг BC, AC, AB , не содержащих A, B, C , соответственно. Если $P = AB \cap DF$ и $Q = AC \cap DE$, докажите, что отрезки PQ и BC параллельны.
10. Пусть a, b, c и m — целые числа, причем $m \geq 2$. Если $a^n + bn + c$ делится на m для всякого натурального числа n , докажите, что b^2 делится на m . Обязательно ли b делится на m ?
11. Пусть x, y, z — положительные действительные числа такие, что $x + y + z = 1$. Докажите, что справедливо неравенство

$$xy + yz + zx - xyz \leq \frac{8}{27}.$$

12. Сколько существует способов разрезать выпуклый 2017-угольник на треугольники 2014-ю попарно непересекающимися (кроме, быть может, в вершинах многоугольника) диагоналями так, чтобы каждый треугольник имел хотя бы одну общую сторону с исходным 2017-угольником? Ответ следует предъявить в виде $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где k — натуральное число, $p_1, p_2, \dots, p_k$ — простые числа, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — натуральные числа.



ПРИМЕР. Слева: Для четырёхугольника таких разрезов ровно два.
Справа: Одно из возможных разбиений пятиугольника.