Теорема Шпернера

Определение. Дано множество $\mathcal{M}$ из n элементов. Будем называть

- *цепью длины* k набор его различных подмножеств $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_k$;
- *антицепью размера* k набор его подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_k$, никакое из которых не содержится в другом подмножестве из этого набора (т.е. $M_i \not\subset M_j$ при $i \neq j$).

1. Какова наибольшая возможная длина цепи?
2. Докажите, что
$$C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} < C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} = C_n^{\lceil n/2 \rceil} > C_n^{\lceil n/2 \rceil + 1} > \ldots > C_n^{n-1} > C_n^n\ .$$
Обозначим буквой Z число $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (оно же $C_n^{\lceil n/2 \rceil}$).
3. Приведите пример антицепи из Z подмножеств.
Возникает естественный вопрос: а есть ли бОльшие антицепи в $\mathcal{M}$?
4. Дан набор из m подмножеств $\mathcal{M}$ мощности t. Докажите, что
   (a) если $t < \lfloor n/2 \rfloor$, то есть не менее $\frac{n-t}{t+1} \cdot m$ подмножеств $\mathcal{M}$ мощности $t+1$, которые содержат хотя бы одно из данных подмножеств;
   (b) если $t > \lceil n/2 \rceil$, то есть не менее $\frac{t}{n-t+1} \cdot m$ подмножеств $\mathcal{M}$ мощности $t-1$, которые содержатся хотя бы в одном из данных подмножеств.
5. Назовем цепь *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой цепи.
   (a) Сколько всего существует максимальных цепей в множестве $\mathcal{M}$? Обозначим это число за $P(\mathcal{M})$.
   (b) Зафиксируем множество M мощности t. Скольким максимальным цепям принадлежит множество M? Обозначим это число за $P(M)$.
   (c) Пусть дана антицепь $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Докажите, что
$$P(M_1) + P(M_2) + \ldots + P(M_k) \leq P(\mathcal{M}).$$
6. Цепь $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k$ назовём *симметричной*, если $|M_i| + |M_{k-i}| = n$ для всех $i = 0, 1, \ldots, k$ (т.е. мощности множеств симметричны относительно «средней» мощности $n/2$), и *непрерывной*, если $|M_j| - |M_{j-1}| = 1$ для всех $j = 1, \ldots, k$ (т.е. соседние множества отличаются одним элементом). Докажите, что $2^{\mathcal{M}}$ можно покрыть непересекающимися симметричными непрерывными цепями.
7. Докажите **теорему Шпернера:** любая антицепь содержит не более Z подмножеств.

Теорема Шпернера

Определение. Дано множество $\mathcal{M}$ из n элементов. Будем называть

- *цепью длины* k набор его различных подмножеств $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_k$;
- *антицепью размера* k набор его подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_k$, никакое из которых не содержится в другом подмножестве из этого набора (т.е. $M_i \not\subset M_j$ при $i \neq j$).

1. Какова наибольшая возможная длина цепи?
2. Докажите, что

$$C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} < C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} = C_n^{\lceil n/2 \rceil} > C_n^{\lceil n/2 \rceil + 1} > \ldots > C_n^{n-1} > C_n^n .$$

   Обозначим буквой Z число $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (оно же $C_n^{\lceil n/2 \rceil}$).

3. Приведите пример антицепи из Z подмножеств.

   Возникает естественный вопрос: а есть ли бОльшие антицепи в $\mathcal{M}$?

4. Дан набор из m подмножеств $\mathcal{M}$ мощности t. Докажите, что
   (a) если $t < \lfloor n/2 \rfloor$, то есть не менее $\frac{n-t}{t+1} \cdot m$ подмножеств $\mathcal{M}$ мощности $t+1$, которые содержат хотя бы одно из данных подмножеств;
   (b) если $t > \lceil n/2 \rceil$, то есть не менее $\frac{t}{n-t+1} \cdot m$ подмножеств $\mathcal{M}$ мощности $t-1$, которые содержатся хотя бы в одном из данных подмножеств.

5. Назовем цепь *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой цепи.
   (a) Сколько всего существует максимальных цепей в множестве $\mathcal{M}$? Обозначим это число за $P(\mathcal{M})$.
   (b) Зафиксируем множество M мощности t. Скольким максимальным цепям принадлежит множество M? Обозначим это число за $P(M)$.
   (c) Пусть дана антицепь $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Докажите, что

$$P(M_1) + P(M_2) + \ldots + P(M_k) \leq P(\mathcal{M}).$$

6. Цепь $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k$ назовём *симметричной*, если $|M_i| + |M_{k-i}| = n$ для всех $i = 0, 1, \ldots, k$ (т.е. мощности множеств симметричны относительно «средней» мощности $n/2$), и *непрерывной*, если $|M_j| - |M_{j-1}| = 1$ для всех $j = 1, \ldots, k$ (т.е. соседние множества отличаются одним элементом). Докажите, что $2^{\mathcal{M}}$ можно покрыть непересекающимися симметричными непрерывными цепями.

7. Докажите **теорему Шпернера:** любая антицепь содержит не более Z подмножеств.