Порция 6 – 11, трудная

1. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA' и отмечены точки H и O – точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA' относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC.

2. Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.

3. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, \ldots, x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, \ldots, y_{2011}$ кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

Порция 6 – 11, трудная

1. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA' и отмечены точки H и O – точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA' относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC.

2. Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.

3. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, ..., x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, ..., y_{2011}$ кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2011} = y_1 + y_2 + ... + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?