

Кусок 04 – 10, трудный

1. Окружность с центром I касается сторон AB , BC , AC неравностороннего треугольника ABC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Окружности ω_B и ω_C вписаны в четырехугольники BA_1IC_1 и CA_1IB_1 соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_B и ω_C , отличная от IA_1 , проходит через точку A .
2. Даны $n \geq 3$ попарно взаимно простых чисел. Известно, что при делении произведения любых $n - 1$ из них на оставшееся число получается один и тот же остаток r . Докажите, что $r \leq n - 2$.
3. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность x_1, x_2, \dots формулой $x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b .

Кусок 04 – 10, трудный

1. Окружность с центром I касается сторон AB , BC , AC неравностороннего треугольника ABC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Окружности ω_B и ω_C вписаны в четырехугольники BA_1IC_1 и CA_1IB_1 соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_B и ω_C , отличная от IA_1 , проходит через точку A .
2. Даны $n \geq 3$ попарно взаимно простых чисел. Известно, что при делении произведения любых $n - 1$ из них на оставшееся число получается один и тот же остаток r . Докажите, что $r \leq n - 2$.
3. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность x_1, x_2, \dots формулой $x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b .