Кусок 02 – 10, лёгкая

1. В бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел каждое делится хотя бы на одно из чисел 1005 и 1006, но ни одно не делится на 97. Кроме того, каждые два соседних числа отличаются не более, чем на k. При каком наименьшем k такое возможно?
2. Имеется 40 карандашей четырёх цветов – по 10 карандашей каждого цвета. Их раздали 10 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?
3. Даны 10 попарно различных чисел. Для каждой пары данных чисел Вася записал у себя в тетради квадрат их разности, а Петя записал у себя в тетради модуль разности их квадратов. Могли ли в тетрадях у мальчиков получиться одинаковые наборы из 45 чисел?

Кусок 02 – 10, лёгкая

1. В бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел каждое делится хотя бы на одно из чисел 1005 и 1006, но ни одно не делится на 97. Кроме того, каждые два соседних числа отличаются не более, чем на k. При каком наименьшем k такое возможно?
2. Имеется 40 карандашей четырёх цветов – по 10 карандашей каждого цвета. Их раздали 10 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?
3. Даны 10 попарно различных чисел. Для каждой пары данных чисел Вася записал у себя в тетради квадрат их разности, а Петя записал у себя в тетради модуль разности их квадратов. Могли ли в тетрадях у мальчиков получиться одинаковые наборы из 45 чисел?

Кусок 03 – 10, средняя

1. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город.

   Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

2. Внутри треугольника ABC взята точка K, лежащая на биссектрисе угла BAC. Прямая CK вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке M. Окружность Ω проходит через точку A, касается прямой CM в точке K и пересекает вторично отрезок AB в точке P, а окружность ω – в точке Q. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ – прямой. Пусть AF – высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой.

Кусок 03 – 10, средняя

1. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город.

   Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

2. Внутри треугольника ABC взята точка K, лежащая на биссектрисе угла BAC. Прямая CK вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке M. Окружность Ω проходит через точку A, касается прямой CM в точке K и пересекает вторично отрезок AB в точке P, а окружность ω – в точке Q. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ – прямой. Пусть AF – высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой.