

## Свойства тригонометрических функций

1. Что больше:  $2 \sin \frac{5\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}$  или сумма корней уравнения  $|3 \arccos x| = |\arcsin x|$ ?
2. Определите минимальное значение величины  $|x + y|$  при условии, что числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют соотношению

$$5 \cos(x + 4y) - 3 \cos(x - 4y) - 4 \sin(x - 4y) = 10.$$

3. Вычислите  $2 \operatorname{arctg} 2 + \arcsin \frac{4}{5}$ .

4. Для  $x = \frac{\pi}{2n}$  найдите значение суммы

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx.$$

5. Найдите все периодические функции  $y = f(x)$ , удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0,5f(x - \pi) = \sin x.$$

6. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = (\arcsin(\sin(\arccos(\cos 3x))))^{-5}.$$

7. Функция  $f$  с областью определения  $\mathbb{Z}$  удовлетворяет равенствам  $f(1) = \cos 1$ ,  $f(n + 1) = f(n) \cos 1 - \sin n \sin 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Для любого ли целого  $n$  верно неравенство  $f(n) > -1$ ?

8. Найдите наименьшее значение функции  $f$ , определенной на  $\mathbb{N}$  и удовлетворяющей равенствам

$$f(1) = \cos 2, \quad f(n + 1) = f(n) \cos 1 - \sqrt{1 - (f(n))^2} \sin 1$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

9. Существует ли функция  $f$ , определенная при всех  $x \in \mathbb{R}$  и для всех  $x, y \in \mathbb{R}$  удовлетворяющая неравенству

$$|f(x + y) + \sin x + \sin y| < 2 ?$$

10. Докажите, что из трёх положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа  $x$  и  $y$ , что

$$0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq 1 .$$

11. Докажите неравенство  $\sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leq 1$ .

## Тригонометрические уравнения, неравенства и системы

12. Решите уравнение

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right).$$

13. Решите уравнение

$$\frac{\cos 5x + \cos x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{1 + \cos 4x}{\cos x}.$$

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2 \cos^2 x + 4 \sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$

15. Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi(x - y) + \operatorname{ctg}^2 \pi(x - y) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1, \\ x^2 + y^2 \leq 10. \end{cases}$$

16. Решите уравнение

$$\sin^2\left(\frac{2013x}{2}\right) \cdot \cos^2(2014x) \cdot \sin^2\left(\frac{2015x}{2}\right) = 1.$$

17. Решить уравнение  $\sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} |\cos x| = 2$ .

18. Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

19. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{arctg}^2 x = 3 \operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}$$

20. Дано число  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Найдите все пары действительных  $x, y \in [\gamma - \pi, \gamma + \pi)$ , такие что

$$\cos \gamma + \cos x + \cos y = 0, \quad \sin \gamma + \sin x + \sin y = 0.$$

21. Решите уравнение

$$\operatorname{arcsin} \frac{x^2 - 8}{8} = 2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

22. Решите уравнение

$$|x + \sqrt{1 - x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1).$$