Задачи на клетчатой бумаге

1. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый тридцатисемиугольник с целыми сторонами. Докажите, что его периметр — четное число.

2. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах, ни одна из сторон которого не параллельна линиям сетки. Докажите, что сумма длин отрезков вертикальных линий внутри многоугольника равна сумме длин отрезков горизонтальных линий внутри многоугольника.

3. В парке растет 10000 деревьев, посаженных квадратно-гнездовым способом (100 рядов по 100 деревьев). Можно ли срубить 2501 дерево так, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими.)

4. Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

5. Докажите, что площадь любого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, не содержащего узлы ни внутри, ни на границе (за исключением вершин), равна 1/2.

6. **Формула Пика:** $S = N_{\boldsymbol{строго\ внутри}} + \frac{N_{\boldsymbol{на\ границе}}}{2} - 1$**.**

   Пусть произвольный многоугольник $\mathcal{M}$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги разбит на несколько многоугольников $\mathcal{M}_\infty, \mathcal{M}_\in, ..., \mathcal{M}_\|$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Докажите, что если для $\mathcal{M}_\infty, \mathcal{M}_\in, ..., \mathcal{M}_\|$ справедлива формула Пика, то для $\mathcal{M}$ — тоже.

7. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах квадрата?

8. Докажите, что квадрат со стороной n не может накрыть более $(n+1)^2$ точек целочисленной решётки.

9. Какие правильные многоугольники могут иметь все вершины в узлах клетчатой бумаги?

10. Ладья, делая ходы по вертикали и горизонтали на соседнее поле, за 64 хода обошла все поля шахматной доски 8×8 и вернулась на исходное поле. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали.

Задачи на клетчатой бумаге

1. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый тридцатисемиугольник с целыми сторонами. Докажите, что его периметр — четное число.

2. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах, ни одна из сторон которого не параллельна линиям сетки. Докажите, что сумма длин отрезков вертикальных линий внутри многоугольника равна сумме длин отрезков горизонтальных линий внутри многоугольника.

3. В парке растет 10000 деревьев, посаженных квадратно-гнездовым способом (100 рядов по 100 деревьев). Можно ли срубить 2501 дерево так, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими.)

4. Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

5. Докажите, что площадь любого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, не содержащего узлы ни внутри, ни на границе (за исключением вершин), равна 1/2.

6. **Формула Пика:** $S = N_{\textit{строго внутри}} + \frac{N_{\textit{на границе}}}{2} - 1$.

   Пусть произвольный многоугольник $\mathcal{M}$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги разбит на несколько многоугольников $\mathcal{M}_{\infty}, \mathcal{M}_{\in}, ..., \mathcal{M}_{\|}$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Докажите, что если для $\mathcal{M}_{\infty}, \mathcal{M}_{\in}, ..., \mathcal{M}_{\|}$ справедлива формула Пика, то для $\mathcal{M}$ — тоже.

7. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах квадрата?

8. Докажите, что квадрат со стороной n не может накрыть более $(n+1)^2$ точек целочисленной решётки.

9. Какие правильные многоугольники могут иметь все вершины в узлах клетчатой бумаги?

10. Ладья, делая ходы по вертикали и горизонтали на соседнее поле, за 64 хода обошла все поля шахматной доски 8×8 и вернулась на исходное поле. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали.