Разнобой по алгебре

1. Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(1000)$, если $f(\frac{1}{1000}) = 1$.
2. Числа x, y, z удовлетворяют системе $\begin{cases} x + y + z = a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$. Докажите, что хотя бы одно из них равно a.
3. Докажите, что для $a, b > 0$ имеет место неравенство $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.
4. Про многочлен $f(z) = z^{10} + a_9 z^9 + \ldots + a_0$ известно, что $f(1) = f(-1)$, ..., $f(5) = f(-5)$. Докажите, что $f(z) = f(-z)$ для любого действительного z.
5. Даны числа $a, b, c \in \mathbb{R}$. Известно, что $5a + 3b + 3c = 0$. Докажите, что найдется корень x_0 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, такой что $0 \leq x_0 \leq 2$.
6. Каково наибольшее значение выражения $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z$?
7. Разложите на множители $x^4 + 1$ отдельно в $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{C}$.

Разнобой по алгебре

1. Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(1000)$, если $f(\frac{1}{1000}) = 1$.
2. Числа x, y, z удовлетворяют системе $\begin{cases} x + y + z = a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$. Докажите, что хотя бы одно из них равно a.
3. Докажите, что для $a, b > 0$ имеет место неравенство $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.
4. Про многочлен $f(z) = z^{10} + a_9 z^9 + \ldots + a_0$ известно, что $f(1) = f(-1)$, ..., $f(5) = f(-5)$. Докажите, что $f(z) = f(-z)$ для любого действительного z.
5. Даны числа $a, b, c \in \mathbb{R}$. Известно, что $5a + 3b + 3c = 0$. Докажите, что найдется корень x_0 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, такой что $0 \leq x_0 \leq 2$.
6. Каково наибольшее значение выражения $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z$?
7. Разложите на множители $x^4 + 1$ отдельно в $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{C}$.