Комбинаторика и логика

Теоремы Рамсея

Шарич Владимир Златкович

Сообщество Математическая школа

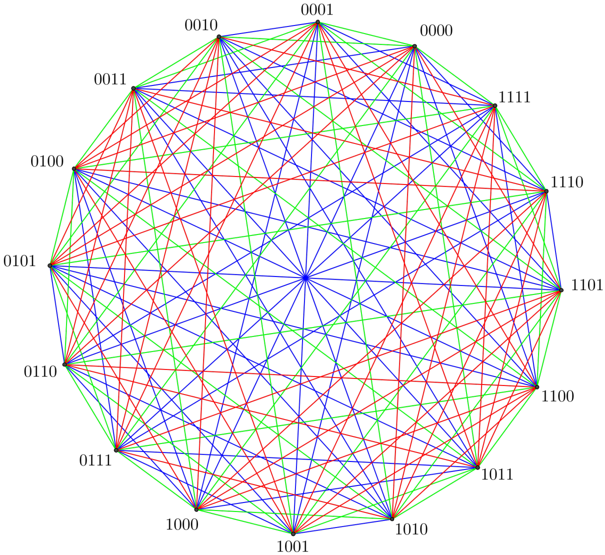
MathSchool.ru 2017

Теорема Рамсея для графов

1. **Число Рамсея $R_2^2(3,3)$.**
Собралась компания из шести человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Докажите, что можно выбрать троих, которые либо все знакомы друг с другом, либо все не знакомы друг с другом.
Верно ли такое же утверждение для компании из пяти человек?

2. **Число Рамсея $R_2^3(3,3,3)$: оценка.**
17 ученых переписываются по трем дисциплинам. При этом любая пара ученых переписывается ровно по одной дисциплине. Докажите, что можно выбрать троих ученых, которые переписываются по одной дисциплине.

:) Число Рамсея $R_2^3(3,3,3)$: пример.



3. **Число Рамсея $R_2^h(\infty, \infty, ..., \infty)$.**
Все рёбра полного графа с бесконечным количеством вершин покрашены в h цветов. Докажите, что найдется бесконечный полный подграф этого графа, все ребра которого покрашены в один и тот же цвет.

4. Докажите, что $R_2^2(3,4)=9$.

5. Докажите, что если число вершин в графе не меньше $\binom{2n-2}{n-1}$, то либо он сам, либо двойственный к нему граф содержит полный подграф из n вершин.

6. Все натуральные числа окрашены в конечное число цветов. Докажите, что найдутся три числа x, y, z одного цвета такие, что $x + y = z$.

Теорема Рамсея для гиперграфов

!! **Число Рамсея $R_k^h(m_1, m_2, \dots, m_h)$.**

Будем говорить, что множество k-цвета c, если все его k-элементные подмножетсва окрашены в цвет c. Пусть даны числа h, m_1, m_2, ..., m_h, k. Существует число $n = n_k^h(m_1, m_2, \dots, m_h)$ такое, что как бы мы ни покрасили все k–элементные подмножества n–элементного множества в h цветов,

$$\text{то} \left[\begin{array}{l} \exists\ m_1\text{–подмножество } k\text{-цвета } 1, \\ \exists\ m_2\text{–подмножество } k\text{-цвета } 2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ \exists\ m_h\text{–подмножество } k\text{-цвета } h. \end{array} \right.$$

Наименьшее такое n называется *числом Рамсея* и обозначается $R_k^h(m_1, m_2, \dots, m_h)$.

7. Найдите $R_1^h(m_1, m_2, ..., m_h)$.

8. Докажите неравенство

$$R_k^h(m_1, m_2, ..., m_h) \le$$

$$\le R_{k-1}^h \begin{pmatrix} R_k^h(m_1 - 1, m_2, ..., m_h), \\ R_k^h(m_1, m_2 - 1, ..., m_h), \\ ..., \\ R_k^h(m_1, m_2, ..., m_h - 1) \end{pmatrix} + 1.$$

9. Назовем тройку людей хорошей, если ее можно отправить в поход (так что люди не поссорятся) и плохой в противном случае. Докажите, что из бесконечного числа людей можно выбрать либо 100 человек, так чтобы любая тройка из них была хорошей, либо 100 человек, так чтобы любая тройка из них была плохой.

10. **Задача Эрдёша-Секереша.**

a) Докажите, что если любые 4 из 5 точек образуют выпуклый четырехугольник, то все 5 образуют выпуклый пятиугольник.

b) Докажите, что если дано достаточно много точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, то среди них можно выбрать 5, которые являются вершинами выпуклого пятиугольника.

c) Обобщите на произвольное количество вершин $(5 \longrightarrow k)$.

Удачных занятий математикой!

Шарич В.З.
sharich@mathschool.ru

Математическая школа