Экспресс-подготовка к региональному этапу, 09 класс

Правда или ложь

1. На 11 листках бумаги написаны 11 фраз (по одной на листке):

   01) Левее этого листка нет листков с ложными утверждениями.

   02) Ровно 1 листок левее этого содержит ложное утверждение.

   03) Ровно 2 листка левее этого содержат ложные утверждения.

   ...

   11) Ровно 10 листков левее этого содержат ложные утверждения.

   Листки в некотором порядке выложили в ряд, идущий слева направо. После этого некоторые из написанных утверждений стали верными, а некоторые – неверными. Каково наибольшее возможное число верных утверждений?

2. За круглым столом сидят 30 человек – рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг – лжец, а у лжеца этот друг – рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также отве- тить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

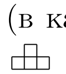
Инварианты – наши друзья

3. Правильный треугольник стандартным образом разбит на 25 меньших правильных треугольников, занумерованных числами от 1 до 25. Можно ли эти же числа расставить в клетках квадрата 5×5 так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольниках, были записаны и в соседних клетках квадрата? (Треугольники, так же, как и клетки квадрата, считаются соседними, если имеют общую сторону.)

4. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек – обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмеча- лась точка D, симметричная A относительно серединного пер- пендикуляра к BC. Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходные точки также лежали на одной прямой.

Оценка + Пример

5. По кругу выписаны числа 1, 2, 3, ..., 10 в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

6. В клетках доски 8×8 расставлены числа -1 и $+1$ (в каждой клетке – по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения фигурки  на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.