

Доказательство существования

1. Можно ли познакомить между собой n человек так, чтобы любой был знаком ровно с k другими? (Ответ дать в зависимости от n и k .)
2. Штат охранного предприятия насчитывает $2n + 1$ человека. Каждую ночь дежурит группа из троих охранников. Может ли через некоторое количество ночей оказаться, что любые двое ровно трижды дежурили вместе?
3. Дано множество M из 7 элементов. Докажите, что можно выбрать 7 подмножеств M так, чтобы любые два пересекались ровно по одному элементу. (Требуется красивая геометрическая конструкция. Та самая.)
4. Президент акционерного общества «Не обманешь – не продашь» объявил на собрании акционеров, что за каждые пять последовательных месяцев расход фирмы превышал доход, а за весь год доход превысил расход. Должны ли акционеры подать на него в суд?
5. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 100 членов — целые числа, а все остальные члены не являются целыми?
6. Можно ли все натуральные числа раскрасить в два цвета так, чтобы не было бесконечной арифметической прогрессии одного цвета?
7. Докажите, что существует число, сумма цифр квадрата которого более чем в 1000 раз превышает сумму цифр самого числа.
8. В каждой клетке квадрата 8×8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Какое наибольшее количество таких частей может быть?
9. На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать две из них (скажем, A и B) так, что отрезок AB виден из любой другой отмеченной точки под острым углом.
10. На плоскости расположено несколько точек. Площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не более 1. Докажите, что все точки лежат внутри некоторого треугольника площади 4.
11. На плоскости дано конечное множество точек. Докажите, что либо все они лежат на одной прямой, либо есть прямая, проходящая ровно через две из них.
12. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано какое-то действительное число. Докажите, что в некоторой клетке написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми окружающих ее клеток.

Доказательство существования

1. Можно ли познакомить между собой n человек так, чтобы любой был знаком ровно с k другими? (Ответ дать в зависимости от n и k .)
2. Штат охранного предприятия насчитывает $2n + 1$ человека. Каждую ночь дежурит группа из троих охранников. Может ли через некоторое количество ночей оказаться, что любые двое ровно трижды дежурили вместе?
3. Дано множество M из 7 элементов. Докажите, что можно выбрать 7 подмножеств M так, чтобы любые два пересекались ровно по одному элементу. (Требуется красивая геометрическая конструкция. Та самая.)
4. Президент акционерного общества «Не обманешь – не продашь» объявил на собрании акционеров, что за каждые пять последовательных месяцев расход фирмы превышал доход, а за весь год доход превысил расход. Должны ли акционеры подать на него в суд?
5. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 100 членов — целые числа, а все остальные члены не являются целыми?
6. Можно ли все натуральные числа раскрасить в два цвета так, чтобы не было бесконечной арифметической прогрессии одного цвета?
7. Докажите, что существует число, сумма цифр квадрата которого более чем в 1000 раз превышает сумму цифр самого числа.
8. В каждой клетке квадрата 8×8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Какое наибольшее количество таких частей может быть?
9. На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать две из них (скажем, A и B) так, что отрезок AB виден из любой другой отмеченной точки под острым углом.
10. На плоскости расположено несколько точек. Площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не более 1. Докажите, что все точки лежат внутри некоторого треугольника площади 4.
11. На плоскости дано конечное множество точек. Докажите, что либо все они лежат на одной прямой, либо есть прямая, проходящая ровно через две из них.
12. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано какое-то действительное число. Докажите, что в некоторой клетке написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми окружающих ее клеток.