

Комбинаторика и теория чисел МГУ

1. Сколько точек с целочисленными координатами находится строго внутри фигуры, ограниченной линиями $x = \frac{3}{2}$, $x = 129$, $y = \log_2 x$ и осью абсцисс?

2. Найдите все целочисленные решения системы
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0 \\ x + 2y < \frac{15}{2} \end{cases}$$

3. Найдите все трёхзначные натуральные числа, которые больше суммы квадратов своих цифр ровно на 517.

4. Ученик перемножил два натуральных числа и допустил ошибку, увеличив произведение на 372. Поделив для проверки полученный результат на меньшее из данных чисел, ученик получил в частном 90 и в остатке 29. Найдите данные числа.

5. В ящике находятся 13 чёрных шаров и 17 белых. Разрешается:

- положить 2 чёрных шара и одновременно вынуть 1 белый шар;
- положить 1 чёрный шар и одновременно положить 2 белых шара;
- вынуть 2 чёрных шара и одновременно положить 1 белый шар;
- вынуть 1 чёрный шар и одновременно вынуть 2 белых шара.

Можно ли, совершая описанные действия в каком-либо порядке и количестве, добиться, чтобы в ящике оказалось 37 чёрных шаров и 43 белых?

6. Найдите сумму всех натуральных чисел n , для которых числа 5600 и 3024 делятся соответственно на n и $n + 5$.

7. Множество содержит более семи различных, попарно не взаимно простых натуральных чисел. Найдите эти числа, если их наименьшее общее кратное равно 210, а произведение делится на 1920 и не является квадратом целого числа.

8. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m, n — натуральные числа. На какие натуральные числа могла бы быть сократима дробь $\frac{3n - m}{5n + 2m}$?

9. Найдите все целочисленные решения уравнения $3xy + 14x + 17y + 71 = 0$.

10. Решите в целых числах уравнение $14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 - 125x^2 + 82y^2 + 51 = 0$.

11. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 1953^{100}xy - 1995^{100}y^2 = 0$.

12. Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в первой команде было 4 мальчика и 3 девочки?

13. Автобусный билет считается счастливым, если первые три цифры его шестизначного номера нечетны и различны, а вторые — четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует различных номеров счастливых билетов?

14. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдите сумму всех четырёхзначных чётных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра в числе может повторяться).

Комбинаторика и теория чисел МГУ

1. Сколько точек с целочисленными координатами находится строго внутри фигуры, ограниченной линиями $x = \frac{3}{2}$, $x = 129$, $y = \log_2 x$ и осью абсцисс?

2. Найдите все целочисленные решения системы
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0 \\ x + 2y < \frac{15}{2} \end{cases}$$

3. Найдите все трёхзначные натуральные числа, которые больше суммы квадратов своих цифр ровно на 517.

4. Ученик перемножил два натуральных числа и допустил ошибку, увеличив произведение на 372. Поделив для проверки полученный результат на меньшее из данных чисел, ученик получил в частном 90 и в остатке 29. Найдите данные числа.

5. В ящике находятся 13 чёрных шаров и 17 белых. Разрешается:

- положить 2 чёрных шара и одновременно вынуть 1 белый шар;
- положить 1 чёрный шар и одновременно положить 2 белых шара;
- вынуть 2 чёрных шара и одновременно положить 1 белый шар;
- вынуть 1 чёрный шар и одновременно вынуть 2 белых шара.

Можно ли, совершая описанные действия в каком-либо порядке и количестве, добиться, чтобы в ящике оказалось 37 чёрных шаров и 43 белых?

6. Найдите сумму всех натуральных чисел n , для которых числа 5600 и 3024 делятся соответственно на n и $n + 5$.

7. Множество содержит более семи различных, попарно не взаимно простых натуральных чисел. Найдите эти числа, если их наименьшее общее кратное равно 210, а произведение делится на 1920 и не является квадратом целого числа.

8. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m, n — натуральные числа. На какие натуральные числа могла бы быть сократима дробь $\frac{3n - m}{5n + 2m}$?

9. Найдите все целочисленные решения уравнения $3xy + 14x + 17y + 71 = 0$.

10. Решите в целых числах уравнение $14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 - 125x^2 + 82y^2 + 51 = 0$.

11. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 1953^{100}xy - 1995^{100}y^2 = 0$.

12. Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в первой команде было 4 мальчика и 3 девочки?

13. Автобусный билет считается счастливым, если первые три цифры его шестизначного номера нечетны и различны, а вторые — четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует различных номеров счастливых билетов?

14. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдите сумму всех четырёхзначных чётных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра в числе может повторяться).