

# Тригонометрические задачи МГУ

## Уравнения и неравенства

1. Решите уравнение  $\cos^2 6x + \sin^2 3x - 1 = 0$ .
2. Решите уравнение  $2 \cos x(1 + \cos x) = 1 - \sqrt{3} \sin 2x$ .
3. Решите неравенство  $\sqrt{6} \sin x + \cos 2x \leq 1$ .
4. Решите уравнение

$$x + \frac{1}{6} \arccos(\cos 15x + 2 \cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

5. Решите уравнение  $\frac{2}{\pi} \sin x + \cos 19\pi = \cos x$ .
6. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$6 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1 = 0.$$

7. Решите неравенство  $4 \cos x - \sin 2x < 0$ .
8. Решите уравнение

$$\arccos \left( \frac{1}{2} + \cos \left( \pi \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7} \right) \right) - \frac{2\pi}{3} = 0.$$

9. Решите уравнение  $4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}$ .

## Множество значений

10. Решите неравенство

$$\sqrt[4]{13 + 3^{31 - \cos x}} \leq \sqrt{5e^{-2x^2} - 1}.$$

11. Решите уравнение

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5\pi^2}{4} = \sqrt{2 - |y|} \cdot (5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}).$$

12. Решите уравнение  $2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1 + \sqrt[4]{2}}$ .

13. Решите неравенство  $\left(x - x^2 - \frac{5}{4}\right) \log_{\sqrt{3}}(2 + 2 \cos^2 x - \cos 2x + 3 \cos^2 \pi x) \geq -2$

14. Существуют ли  $A, B, \varphi, \psi$ , для которых функция

$$f(x) = \left(\sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\right)^2 + A \cos(x + \varphi) + B \sin(2x + \psi)$$

является константой? Найдите все возможные значения этой константы.

## Разное

15. Найдите наименьший положительный корень уравнения  $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi(x^2 + 2x + 1))$ .

Ответ:  $x = (\sqrt{3} - 1)/2$

16. Найдите все корни уравнения  $\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 6x = \frac{1}{\sin 4x}$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ .

Ответ:  $x = \pi/8 + \pi n/4, x = \pi/4 + \pi k/10$  ( $n = 0, \pm 1, 2, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ )

17. Найдите ближайший к  $\frac{13}{4}\pi$  корень уравнения  $\sin x \cos 2x + \sin x + \frac{10}{11} \sin 2x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{30}{44}$ .

Ответ:  $x = 3\pi + \arccos(10/11)$

18. Найдите наименьший неотрицательный корень уравнения  $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}$ .

Ответ:  $x = 4\pi/3$

19. Найдите все отрицательные корни уравнения  $1 + \sin 7x = \left(\cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{3x}{2}\right)^2$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi n}{(-1)^n \cdot 3 - 7}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

20. Решите уравнение  $2 \cos 2x + \cos^2 \frac{x}{2} - 10 \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \cos x$ .

Ответ:  $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )

21. Решите уравнение  $\sqrt[4]{8} \cos x - 1 = (\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}) \sqrt{\cos x}$

Ответ:  $x = \pm \pi/4 + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )

22. Решите неравенство  $\sqrt{4x - x^2 - 3} (\sqrt{2} \cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) \geq 0$ .

Ответ:  $1 \leq x \leq \pi/2, x = 3$

23. Решите уравнение  $\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{1}{2} \cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$ .

Ответ:  $x = \pi/4 + \pi n/2, \pi/2 + \pi k$  ( $n, k \in \mathbb{Z}$ )

24. Решите уравнение  $\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6} \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$ .

Ответ:  $x = 5\pi/4 + 5\pi n, \pm 5\pi/8 - 25\pi/24 + 5\pi k$  ( $n, k \in \mathbb{Z}$ )

25. Решите уравнение  $(\cos x - 1) \left(\sin x - \frac{1}{2} \cos 2x - 1\right) = \sin^2 x$ .

26. Решите уравнение  $|\sin^3 x| + 13 \cos^3 x - \cos x = 0$ .

Ответ:  $x = \pi \pm \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )

27. Функция  $f$  определена на отрезке  $[2/5, 5/2]$  и удовлетворяет на нем системе

$$\cos(2(f(x))) - 6 \cos^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - 3x}{x}, \quad 0 \leq f(x) \leq \pi/2.$$

Решите уравнение  $f(x) = 5\pi/12$ .

Ответ:  $x = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$