

Инверсия и ортогональность

1. Пусть фигуры α, β – обобщенные окружности (т.е. каждая из фигур – окружность либо прямая). Докажите, что угол между α и β (в точке их пересечения) равен углу между образами этих фигур при инверсии.
2. Окружности δ и ω различны. Докажите, что δ переходит в себя при инверсии относительно окружности ω тогда и только тогда, когда $\omega \perp \delta$.
3. Дана окружность ω . Докажите, что точки P и Q инверсны относительно ω , если и только если

$$\forall \delta \perp \omega \quad P \in \delta \iff Q \in \delta .$$

4. На плоскости даны окружности γ и ω . $\hat{\omega} = \psi_\gamma(\omega)$. Докажите, что

$$\psi_\gamma \circ \psi_\omega \circ \psi_\gamma = \psi_{\hat{\omega}} .$$

5. Докажите, что две непересекающиеся окружности (или непересекающиеся окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

6. Поризм Штейнера.

Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 . Пусть окружность σ касается их обеих.

Определим цепочку окружностей σ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$): $\sigma_0 = \sigma$, для всякого $k \geq 1$ окружность σ_k (отличная от σ_{k-2} при $k \geq 2$) касается ω_1, ω_2 и σ_{k-1} .

Назовем σ *хорошей* порядка n , если для некоторого натурального n (зависящего от σ) окружность σ_n совпала с исходной окружностью σ .

Докажите, что если есть хотя бы одна хорошая окружность порядка n , то любая окружность, касающаяся ω_1 и ω_2 , хорошая порядка n .

7. Циркулем и линейкой постройте образ данной точки при инверсии относительно данной окружности.

8. Задача Аполлония.

Постройте циркулем и линейкой окружность, прямую или точку, касающуюся каждой из трёх данных окружностей, прямых или точек. (Под касанием прямых подразумевается их параллельность.) Разберите все возможные случаи.

Инверсия и ортогональность

1. Пусть фигуры α, β – обобщенные окружности (т.е. каждая из фигур – окружность либо прямая). Докажите, что угол между α и β (в точке их пересечения) равен углу между образами этих фигур при инверсии.
2. Окружности δ и ω различны. Докажите, что δ переходит в себя при инверсии относительно окружности ω тогда и только тогда, когда $\omega \perp \delta$.
3. Дана окружность ω . Докажите, что точки P и Q инверсны относительно ω , если и только если

$$\forall \delta \perp \omega \quad P \in \delta \iff Q \in \delta .$$

4. На плоскости даны окружности γ и ω . $\widehat{\omega} = \psi_\gamma(\omega)$. Докажите, что

$$\psi_\gamma \circ \psi_\omega \circ \psi_\gamma = \psi_{\widehat{\omega}} .$$

5. Докажите, что две непересекающиеся окружности (или непересекающиеся окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

6. Поризм Штейнера.

Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 . Пусть окружность σ касается их обеих.

Определим цепочку окружностей σ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$): $\sigma_0 = \sigma$, для всякого $k \geq 1$ окружность σ_k (отличная от σ_{k-2} при $k \geq 2$) касается ω_1, ω_2 и σ_{k-1} .

Назовем σ *хорошей* порядка n , если для некоторого натурального n (зависящего от σ) окружность σ_n совпала с исходной окружностью σ .

Докажите, что если есть хотя бы одна хорошая окружность порядка n , то любая окружность, касающаяся ω_1 и ω_2 , хорошая порядка n .

7. Циркулем и линейкой постройте образ данной точки при инверсии относительно данной окружности.

8. Задача Аполлония.

Постройте циркулем и линейкой окружность, прямую или точку, касающуюся каждой из трёх данных окружностей, прямых или точек. (Под касанием прямых подразумевается их параллельность.) Разберите все возможные случаи.