

МАТЕМАТИКА

Доказательство существования

Шарич Владимир Златкович



Высшая школа экономики

Национальный исследовательский университет

Факультет математики

2018/2019

Шарич Владимир Златкович (я)

'95—'00 призёр олимпиад по математике в Сербии и России

'00—'05 МГУ, специалитет «Математика»

'03—'15 молод и полон сил

- преподаватель в специализированных классах (Л2Ш, СУНЦ МГУ, ТЛ«2x2», ЦДО, МГ, ФЛ)
- преподаватель на выездных школах (Киров, Кострома, Камчатка, Казахстан, Сербия, Беларусь, Корея, «Сириус»)
- член жюри турниров и олимпиад (УТЮМ, КОЛМ, ФЕСТ, ЮМТ, ВМО, ММО, ТГ)
- руководитель методкомиссии Математического многоборья



'14—'16 заведующий кафедрой математики Физтех–лицея

'15—'17 МФТИ, магистратура «Advanced Combinatorics»

'16—.... з.к. математики (с '18 — руководитель УМО) Фоксфорда

'17—.... преподаватель программы «Математическое образование»



Фоксфорд



Высшая школа экономики
Национальный исследовательский университет



Центр
Педагогического
Мастерства



Математическая
школа

Как доказать существование?

Как доказать существование?

Явная конструкция	Самый простой способ доказать, что объект существует, — предъявить его!
Метод крайнего	Иногда нужный объект экстремален по какому-то параметру...
Непрерывность	Если менять целочисленную величину от A до B , каждый раз прибавляя или вычитая 1, то эта величина заведомо примет все значения между A и B .

Явная конструкция

1. Можно ли поставить в ряд все натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы каждые два соседних числа отличались либо на 2, либо в два раза?

2. Дан набор одинаковых правильных пятиугольников, при вершинах каждого из которых записаны натуральные числа от 1 до 5 по часовой стрелке. Пятиугольники можно поворачивать и переворачивать. Их сложили в стопку (вершина к вершине), и оказалось, что при всех пяти вершинах суммы чисел одинаковы. Сколько пятиугольников могло быть в этой стопке?

3. Найдите такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение каждых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.

4. Можно ли познакомить между собой n человек так, чтобы любой был знаком ровно с k другими? (Ответ дать в зависимости от n и k .)

Метод крайнего

5. Некоторые точки плоскости окрашены в синий или красный цвет так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой; точек каждого цвета не меньше трёх. Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трёх сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

6. Можно ли числа от 1 до 16 можно записать...

а) ... по кругу...

б) ... в строку...

... так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа?

7. На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает ближайшую к нему планету. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.

8. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано какое-то действительное число. Докажите, что в некоторой клетке написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми окружающих ее клеток.

Непрерывность

9. Матч между двумя футбольными командами закончился со счетом $8 : 5$. Докажите, что был момент, когда первая команда забила столько же мячей, сколько второй оставалось забить.

10. Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2$, $1001! + 3$, ..., $1001! + 1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых чисел?

11. Ницше расставил в произвольном порядке 10-томное собрание своих сочинений. Назовем беспорядком пару томов, для которых том с бóльшим номером стоит левее. Для данной расстановки томов посчитано число S всех беспорядков. Какие значения может принимать S ?

12. Выйдя на маршрут в 4 часа утра, альпинист Джеф Лоу к вечеру достиг пика «Свободная Корея». Переночевав на вершине, на следующий день он вышел в то же время и быстро спустился обратно по пути подъёма. Докажите, что на маршруте есть такая точка, которую Лоу во время спуска и во время подъёма проходил в одно и то же время суток.

Удачных занятий математикой!

Шарич В.З.
mathschool.ru/sharich



Фоксфорд



Высшая школа экономики

Национальный исследовательский университет



**Математическая
школа**



**Центр
Педагогического
Мастерства**