Геометрия комплексных чисел

1. Решите уравнение $|z-1|+|z-\mathfrak{i}|=\sqrt{2}$.
2. Пусть $|x|=|y|=|z|$. Докажите, что
$$\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \in \mathbb{R}.$$
3. На сторонах треугольника ABC построены квадраты ABB_1A_1 и ACC_1A_2, перекрывающиеся с этим треугольником. Найдите угол между медианой AM треугольника ABC и отрезком A_1A_2, а также отношение их длин.
4. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда
$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4} \in \mathbb{R}.$$
5. Треугольники $\triangle ABC$, $\triangle AB_AC_A$, $\triangle A_CB_CC$, $\triangle A_BBC_B$ одинаково ориентированы и подобны при указанном порядке обхода вершин. Докажите, что середины отрезков A_BA_C, C_AC_B, B_CB_A образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$.
6. На плоскости даны окружности γ и ω. Докажите, что композиция инверсий $\psi_\gamma \circ \psi_\omega \circ \psi_\gamma$ является инверсией. Дополнительный вопрос: относительно какой окружности?
7. Найдите внутри равностороннего треугольника ABC геометрическое место точек X, таких что $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ$.
8. На единичной окружности отмечены n точек, являющиеся вершинами правильного n-угольника. Одна из них соединена хордами с остальными. Найдите произведение длин этих хорд.

Геометрия комплексных чисел

1. Решите уравнение $|z-1|+|z-\mathfrak{i}|=\sqrt{2}$.
2. Пусть $|x|=|y|=|z|$. Докажите, что
$$\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\in\mathbb{R}.$$
3. На сторонах треугольника ABC построены квадраты ABB_1A_1 и ACC_1A_2, перекрывающиеся с этим треугольником. Найдите угол между медианой AM треугольника ABC и отрезком A_1A_2, а также отношение их длин.
4. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда
$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\in\mathbb{R}.$$
5. Треугольники $\triangle ABC$, $\triangle AB_AC_A$, $\triangle A_CB_CC$, $\triangle A_BBC_B$ одинаково ориентированы и подобны при указанном порядке обхода вершин. Докажите, что середины отрезков A_BA_C, C_AC_B, B_CB_A образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$.
6. На плоскости даны окружности γ и ω. Докажите, что композиция инверсий $\psi_\gamma\circ\psi_\omega\circ\psi_\gamma$ является инверсией. Дополнительный вопрос: относительно какой окружности?
7. Найдите внутри равностороннего треугольника ABC геометрическое место точек X, таких что $\angle XAB+\angle XBC+\angle XCA=90^\circ$.
8. На единичной окружности отмечены n точек, являющиеся вершинами правильного n-угольника. Одна из них соединена хордами с остальными. Найдите произведение длин этих хорд.