Учебные задачи, 09 кл, теория чисел

Сплошная оКОЛесица

Докажите, что для любого натурального n, взаимно простого с 10, найдётся натуральное k такое, что $nk = 11...1$.

Единственное решение

Докажите, что уравнение $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, имеет единственное решение $x, y \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $n \in \mathbb{P}$.

Что-то знакомое...

Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$.

Раз знаменатель, то и дробь

a, b и n – натуральные числа и n нечётно. Докажите, что если числитель и знаменатель дроби

$$\frac{a^n + b^n}{a + b}$$

делятся на n, то и сама дробь делится на n.

Заключительные этапы, 09 кл, теория чисел

zakl2009, 09.3, Голованов

Дано натуральное $n > 1$. Число $a > n^2$ таково, что среди чисел
$$a+1, a+2, ..., a+n$$
есть кратные каждого из чисел
$$n^2+1, n^2+2, ..., n^2+n.$$
Докажите, что $a > n^4 - n^3$.

zakl2009, 09.6, Агаханов

Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?

zakl2010, 09.7, Сендеров

Назовём натуральное число n *неудачным*, если его нельзя представить в виде $n = \dfrac{x^2-1}{y^2-1}$ при натуральных $x, y > 1$. Конечно или бесконечно количество неудачных чисел?

zakl2011, 09.4, Берлов

Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

zakl2011, 09.5, Богданов

Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $\dfrac{2011 \cdot 2010}{2}$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и ещё ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3?

zakl2012, 09.1, Агаханов

Пусть $a_1, a_2, ..., a_{11}$ – различные натуральные числа, не меньше 2, сумма которых равна 407. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, ..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ равна 2012?

zakl2012, 09.7, Агаханов

Изначально на доске записаны 10 последовательных натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа на доске (обозначим их a и b) и заменить их на числа $a^2 - 2011b^2$ и ab. После нескольких таких операций на доске не осталось ни одного из исходных чисел. Могли ли там опять оказаться 10 последовательных натуральных чисел?