Критерий Карно

1. Докажите, что $CD \perp AB$ тогда и только тогда, когда $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

2. Дано число $d \in \mathbb{R}$. Сколько существует точек X на прямой AB, таких что $AX^2 - BX^2 = d$?

3. Докажите, что множество точек с одинаковой степенью относительно двух неконцентрических окружностей — это прямая, перпендикулярная прямой центров (это так называемая *радикальная ось* двух окружностей).

4. **Критерий Карно.** Пусть даны три неколлинеарные точки A, B, C и три произвольные точки A', B', C'. Перпендикуляр из A' на BC обозначим ℓ_a, аналогично определим ℓ_b и ℓ_c. Докажите, что
$$\ell_a \cap \ell_b \cap \ell_c \neq \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad A'B^2 + B'C^2 + C'A^2 = A'C^2 + B'A^2 + C'B^2.$$

5. Применение критерия Карно в известных ситуациях.
   (a) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
   (b) Три окружности попарно пересекаются. Докажите, что общие хорды (или их продолжения) пар этих окружностей пересекаются в одной точке.

6. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_n$ — точки плоскости, возможно совпадающие; $d \in \mathbb{R}$. Докажите, что ГМТ X:
$$k_1 C_1 X^2 + k_2 C_2 X^2 + \dots = d$$
   - если $\sum k_i = 0$, то это либо вся плоскость, либо прямая, либо $\emptyset$;
   - если $\sum k_i \neq 0$, то это либо окружность, либо точка, либо пустое множество.

   Приведите примеры, показывающие, что все случаи в задаче 6 возможны.

7. **Окружность Аполлония.** Докажите, что ГМТ X: $AX : BX = k$ — окружность ($k \neq 1$) либо прямая ($k = 1$).

8. Дан треугольник ΔABC и прямая ℓ, не проходящая через вершины ΔABC. Пусть A', B', C' — основания перпендикуляров на ℓ из A, B, C, соответственно. Пусть a', b', c' — перпендикуляры из A' на BC, из B' на AC, из C' на AB. Докажите, что прямые a', b', c' пересекаются в одной точке.

9. Точки M, N таковы, что $AM : BM : CM = AN : BN : CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

10. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются ω_5 внешним образом; при этом ω_1 и ω_3 касаются ω_2 и ω_4 также внешним образом. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных $\ell_{\omega_2\omega_5}$ и $\ell_{\omega_4\omega_5}$ лежит на прямой центров ω_1 и ω_3.