

Критерий Карно

1. На плоскости даны точки A, B, C, D . Докажите, что $CD \perp AB$ тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
2. Дано число $t \in \mathbb{R}$. Сколько существует точек X на прямой AB , таких что $AX^2 - BX^2 = t$ (ответ дать в зависимости от t)?
3. **Критерий Карно.** Пусть даны три неколлинеарные точки A, B, C и три произвольные точки A', B', C' . Перпендикуляр из A' на BC обозначим ℓ_a , аналогично определим ℓ_b и ℓ_c . Докажите, что

$$\ell_a \cap \ell_b \cap \ell_c \neq \emptyset \iff A'B^2 + B'C^2 + C'A^2 = A'C^2 + B'A^2 + C'B^2.$$

4. Применение критерия Карно в известных ситуациях.
 - (а) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
 - (б) Три окружности попарно пересекаются. Докажите, что общие хорды (или их продолжения) пар этих окружностей пересекаются в одной точке.
 - (в) Продолжения радиусов вневписанных окружностей, проведенных в точки касания с *соответствующими* сторонами треугольника, пересекаются в одной точке.
5. Докажите, что множество точек с одинаковой степенью относительно двух неконцентрических окружностей — это прямая, перпендикулярная прямой центров (это так называемая *радикальная ось* двух окружностей).
6. Дан треугольник $\triangle ABC$ и прямая ℓ , не проходящая через вершины $\triangle ABC$. Пусть A', B', C' — основания перпендикуляров на ℓ из A, B, C , соответственно. Пусть a', b', c' — перпендикуляры из A' на BC , из B' на AC , из C' на AB . Докажите, что прямые a', b', c' пересекаются в одной точке.
7. Точки M, N таковы, что $AM:BM:CM = AN:BN:CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .
8. Докажите, что если перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис соответствующим сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.
9. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что если $AC \perp BD$ и $AD \perp BC$, то и $AB \perp CD$.

Критерий Карно

1. На плоскости даны точки A, B, C, D . Докажите, что $CD \perp AB$ тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
2. Дано число $t \in \mathbb{R}$. Сколько существует точек X на прямой AB , таких что $AX^2 - BX^2 = t$ (ответ дать в зависимости от t)?
3. **Критерий Карно.** Пусть даны три неколлинеарные точки A, B, C и три произвольные точки A', B', C' . Перпендикуляр из A' на BC обозначим ℓ_a , аналогично определим ℓ_b и ℓ_c . Докажите, что

$$\ell_a \cap \ell_b \cap \ell_c \neq \emptyset \iff A'B^2 + B'C^2 + C'A^2 = A'C^2 + B'A^2 + C'B^2.$$

4. Применение критерия Карно в известных ситуациях.
 - (а) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
 - (б) Три окружности попарно пересекаются. Докажите, что общие хорды (или их продолжения) пар этих окружностей пересекаются в одной точке.
 - (в) Продолжения радиусов вневписанных окружностей, проведенных в точки касания с *соответствующими* сторонами треугольника, пересекаются в одной точке.
5. Докажите, что множество точек с одинаковой степенью относительно двух неконцентрических окружностей — это прямая, перпендикулярная прямой центров (это так называемая *радикальная ось* двух окружностей).
6. Дан треугольник $\triangle ABC$ и прямая ℓ , не проходящая через вершины $\triangle ABC$. Пусть A', B', C' — основания перпендикуляров на ℓ из A, B, C , соответственно. Пусть a', b', c' — перпендикуляры из A' на BC , из B' на AC , из C' на AB . Докажите, что прямые a', b', c' пересекаются в одной точке.
7. Точки M, N таковы, что $AM:BM:CM = AN:BN:CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .
8. Докажите, что если перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис соответствующим сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.
9. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что если $AC \perp BD$ и $AD \perp BC$, то и $AB \perp CD$.